SEGUNDA OLIMPÍADA LATINOAMERICANA E DO CARIBE UNIVERSITÁRIA DE FÍSICA (OLUF)

11 de maio de 2018

Sociedad Cubana de Física

DADOS PESSOAIS:

Nome:____

Centro de Educação Superior: ____

País: _________________ **Curso**: ______________________ **Ano**: _________

Telefone: ______________________ **E-mail**:__________________________________

Identidade n°:__________________________________

ASSINATURA: _____________________________

PONTUAÇÕES: 1:___ , 2:___ , 3:___ , 4:___ , 5:___ **TOTAL**:________

AS RESOLUÇÕES:

- **As resoluções de problemas diferentes devem ser escritas em folhas separadas.**
- **É permitido o uso de calculadoras**.

PONTUAÇÃO:

- **O valor de cada problema está escrito no enunciado respectivo. Serão pontuadas soluções parciais**.

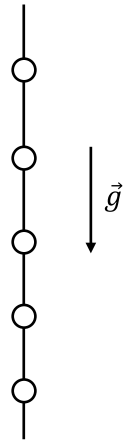
DURAÇÃO:

- **4½ horas**.

Sociedad Cubana de Física

Problema 1: Dinâmica de um ábaco vertical (20 pontos)

A figura amostra um sistema composto por cinco pequenas miçangas elásticas idênticas que podem mover-se por uma varinha muito comprida colocada verticalmente e apoiada no solo. A fricção entre as miçangas e a varinha pode ser desprezada e para todo o espaço que ocupa a varinha a aceleração da gravidade pode ser considerada constante e igual a $\boldsymbol{g}$. No instante $\boldsymbol{t_0}$, a cada miçanga é transmitida uma velocidade diferente que pode ser dirigida para cima ou para baixo.



a) Determine o número máximo possível de choques entre as miçangas.
b) Encontre uma relação entre as velocidades iniciais das miçangas para a qual, desde um sistema inercial ligado ao solo, transcorrido certo intervalo de tempo $\boldsymbol{t}$, a energia cinética sumária das mesmas atinja de novo o valor inicial. Encontre uma expressão para $\boldsymbol{t}$ em função de $\boldsymbol{g}$ e as velocidades iniciais das miçangas.
c) Agora suponha que as miçangas encontravam-se inicialmente em posições equidistantes, a distância $\boldsymbol{d}$ entre duas contíguas e estando a mais baixa a uma altura $\boldsymbol{H}$ do solo. Descreva alguma combinação para o movimento das mesmas, com a qual a chegada de todas ao chão sejam simultâneas ao passar de um tempo $\boldsymbol{t'}$. Encontre uma expressão para $\boldsymbol{t'}$ em função de $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{g}$, e as velocidades iniciais das miçangas.

Sociedad Cubana de Física

Problema 2: A evolução das espécies: a segunda lei da Termodinâmica é violada? (20 pontos)

a) O DNA de uma bactéria contém $5 \cdot 10^6$ pares de bases, cada um dos quais pode ser AT, TA, GC ou CG *. De todas as configurações possíveis somente 10^{13} correspondem a espécies vivas. Qual é a variação de entropia necessária para que da mutação de uma configuração qualquer surja uma espécie viva?

b) Suponha que a evolução das espécies ocorre tão rápido que em 100 anos cada uma evolui para outra 1000 vezes mais organizada e, portanto, 1000 vezes mais improvável. Tendo em conta que sobre a Terra existem 10^{32} organismos vivos, calcule a variação de entropia do planeta produzida a cada segundo pela evolução.

c) A Terra absorve em média $P = 1{,}21 \cdot 10^{17}\, W$ de energia solar e a reemite quase completamente ao espaço exterior, de maneira que sua temperatura média se mantém aproximadamente em uns $288\, K$. A temperatura da superfície do Sol é 5778 K e a do espaço exterior é a temperatura da radiação de fundo de micro-ondas, uns 2,7 K. Na troca de energia no sistema Sol – Terra – Espaço Exterior, quanto varia a entropia cada segundo?

d) Baseando-se nos resultados anteriores, você acredita que exista alguma contradição entre a origem da vida, a evolução das espécies e a segunda Lei da Termodinâmica? Explique.

* A= Adenina, C=Citosina, G= Guanina, T= Timina

Dado: Utilize para a constante de Boltzmann o valor $k \approx 1{,}38 \cdot 10^{-23}\, JK^{-1}$

Sociedad Cubana de Física

Problema 3: Detectando o monopolo magnético (20 pontos)

Frequentemente as equações de Maxwell se formulam da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (1) \qquad\qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J_e} \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e \qquad (3) \qquad\qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (4)$$

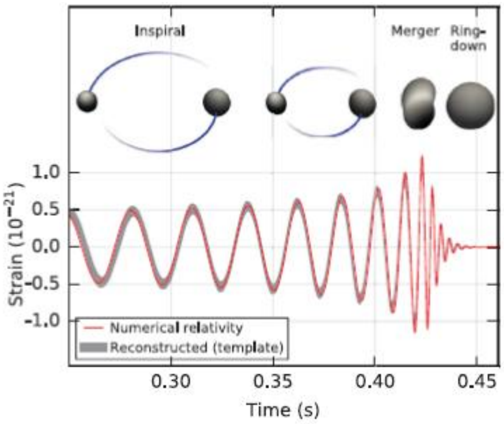
onde $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, ρ_e e $\vec{J_e}$ são o campo elétrico, o campo magnético, a densidade de fluxo elétrico, a densidade de fluxo magnético, a densidade de carga elétrica e a densidade de corrente elétrica, respectivamente.

Alguns modelos teóricos sugerem a existência de monopolos magnéticos (análogos à carga elétrica), e predizem que cada um deles devam ter uma magnitude de $4\,.\,10^{15}\,Tm^2$. Se a teoria estiver correta, as equações de Maxwell poderiam "completar-se" acrescentando adequadamente os termos ρ_m e $\overrightarrow{J_m}$, que representariam a densidade de carga magnética e a densidade de corrente de carga magnética, respectivamente, associadas aos monopolos magnéticos.

a) Escreva como ficariam as equações de Maxwell supondo a existência de monopolos magnéticos.
b) Mesmo que ainda hoje não se tenha conseguido provar experimentalmente sua existência, desde o princípio da década de 1980 tem se tentado detectar os monopolos magnéticos utilizando um anel supercondutor situado em um ambiente blindado, onde se minimiza o ruído magnético "convencional". Utilize as equações de Maxwell por você modificadas para demonstrar que, medindo o fluxo magnético no buraco do anel supercondutor pode-se detectar o eventual passo de um monopolo magnético através do mesmo. Suponha que dentro do material supercondutor do qual é feito o anel sempre se cumpre a condição $\vec{E} = 0$, e que $\vec{B}$ é uniforme no orifício do anel.
c) Suponha que o anel supercondutor foi confeccionado a partir de uma lâmina supercondutora de alta temperatura crítica cuja espessura é de 1 μm, de maneira que o plano do orifício está no plano da lâmina. Qual é, aproximadamente, o máximo raio interior que pode ter o anel caso se pretenda detectar um monopolo magnético com o dispositivo imerso em um refrigerante a T $\approx$ 77 K, considerando apenas os efeitos do ruído térmico? Suponha que $\vec{B}$ é uniforme dentro do orifício do anel, e que é nulo dentro do material supercondutor.

Problema 4: Ondas gravitacionais[1] (20 pontos)

Em 1916 Albert Einstein predisse que as massas aceleradas emitem Ondas Gravitacionais (OG) que se propagam com a mesma velocidade (c) que a luz no vácuo e a seu passo deformam o espaço, modificando as dimensões dos corpos que o ocupam. Estas ondas foram detectadas pela primeira vez em 14 de setembro de 2015 durante um evento astrofísico identificado como GW150914 e permitiram, também pela primeira vez, observar: i) buracos negros de massa maior que 30 vezes a massa $M_{\odot}$ do Sol, ii) um sistema de dois buracos negros que giram ao redor de seu centro de massas comum, iii) a evolução de esse sistema em espiral até a fusão dos dois buracos negros. O prêmio Nobel de Física 2017 foi outorgado a R. Weiss, B. C. Barish e K. S. Thorne por suas decisivas contribuições à criação do detector LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Waves Observatory*) e à observação das OG.



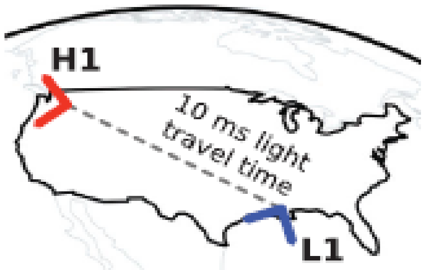


Fig. 1 Painel esquerdo. Representação da evolução do sistema binário de buracos negros observado e da deformação relativa de uma longitude durante o passo da GW150914 por um dos observatórios LIGO. Painel direito. Localização dos detectores do experimento LIGO que detectaram a GW150914 em Livingston (L1) e Hanford (H1).

A evolução do sistema binário antes de sua fusão pode ser aproximadamente descrita com a mecânica newtoniana.

a) Demonstre que se os buracos negros podem ser representados por duas massas pontuais m_1, m_2 situadas à distância d, e que giram em órbitas circulares com velocidade angular ω respeito a seu centro de massa, verificando que:

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{d^3}$$

Onde G é a constante de gravitação universal.

[1] Este problema é inspirado nos artigos: B.P. Abbott et al., *The basic physics of the binary black hole merger* GW150914, Ann. Phys. (Berlim) 529, No. 1-2, 1600209 (2017) e H Mathur, K Brown, A Lowenstein, *An analysis of the LIGO discovery based on Introductory Physics, American Journal of Physics* 85 (9), 676 (2016). As figuras foram tiradas de B. P. Abbott et al., PRL, 116, 061102 (2016).

Sociedad Cubana de Física

b) Demonstre que a energia mecânica do sistema binário, quando seu centro de massas está em repouso, pode ser expressada como:

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{2d} = -\frac{G^{2/3}m_1m_2}{2(m_1+m_2)^{1/3}}\omega^{2/3}$$

c) Ao diminuir a distância entre os buracos negros sua energia mecânica diminui pela emissão de OG, cuja frequência $f = {}^{\omega}/_{\pi}$ aumenta com o tempo. De acordo à Teoria Geral da Relatividade a potência emitida é proporcional ao quadrado do momento de inércia I e vem dada por:

$$P = \frac{32G}{5c^5}I^2\omega^6$$

A forma em que f evolui no tempo está relacionada com a denominada "massa de chio" (chirp mass): $M \equiv \frac{(m_1m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1+m_2)^{\frac{1}{5}}}$. Supondo que a potência emitida em forma do OG é igual à perda da energia mecânica do sistema, demonstre que a "massa de chio" está dada por:

$$M = \frac{c^3}{G}\left(\frac{5}{96}\pi^{-\frac{8}{3}}f^{-\frac{11}{3}}\frac{df}{dt}\right)^{\frac{3}{5}}$$

As medições de f e sua derivada temporária $\frac{df}{dt}$ no evento GW150914 permitiram determinar M$\sim 30\ M_\odot$.

d) Assuma que os buracos negros têm massas iguais. Estime o valor da massa de cada buraco negro em termos da massa solar $M_\odot$ e calcule sua separação d_0 quando a freqüência da OG alcançou seu valor máximo ($f_{max} = 150\ Hz$).

e) A distância mínima a que um objeto pode se aproximar de um buraco negro, chamada rádio de Schwarzschild, é aquela a qual nem sequer a luz pode se livrar de sua atração. Demonstre que a separação calculada no inciso anterior é maior que a mínima distância da qual se podem aproximar dois buracos negros antes de sua fusão.

f) Calcule a energia emitida em forma de OG durante a evolução do sistema binário desde que os buracos negros estavam separados por uma distância muito grande até que estiveram à distância d_0. Expresse essa perda de energia em função de $M_\odot$.

g) Como você explica que a onda gravitacional GW150914 demorou aproximadamente 7 ms a chegar do observatório LIGO em Livingston ao de Hanford, se a distância entre os dois observatórios é de $\sim 3000\ km$?

Para os cálculos utilize $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, {}^{m^3}/_{s^2 \cdot kg}$; $c = 2{,}99 \cdot 10^8\, {}^{m}/_{s}$; $M_\odot = 2{,}00 \cdot 10^{30} kg$.

Problema 5: Massa dos prótons e nêutrons. (20 pontos)

Os prótons e nêutrons (nucleões) levam a maior parte da massa da matéria usual na Terra e em todos os planetas conhecidos. Os nucleões consideram-se formados por três *quarks* de dois tipos *Up* (*u)* e *Down* (*d)*. Dos seis tipos estabelecidos na teoria atual de estas partículas eles são os que possuem menor massa. Em relação a este fato, assuma que ditos *quarks* podem ser tratados como fótos, isto é, como partículas com massa nula que possuem uma energía $\epsilon = \hbar\omega$ e um momento lineal $\vec{p} = \frac{\epsilon}{c^2}\vec{c}$ onde $\vec{c}$ é um vetor na direção do movimento e módulo c igual à velocidade da luz no vácuo . É conhecido que entre dois *quarks* quaisquer existe uma energia potencial (potencial de confinamento) que cresce linearmente com a distância entre eles, $(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2})$, segundo a fórmula $V(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}) = k|\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}|$ onde k é uma constante. Dessa energia potencial se diz que "confinam" os *quarks* impedindo que eles apareçam como partículas livres. Assuma também que os movimentos dos três *quarks* (digamos que em um próton) são realizados em um plano, que suas energias são iguais e que as distâncias entre eles coincidem e não variam no tempo. Considere, além disso, uma condição de quantização quase clássica de Bohr para os *quarks*, de tal maneira que entre o perímetro L de suas órbitas e o módulo de seu momento lineal p, se cumpre a relação $pL = 2\pi n\hbar$, con $n = 1, 2, 3\ldots$

a) Avalie aproximadamente a massa do próton, medida em GeV $(1\,GeV = 10^9\,eV)$, utilizando a informação antes apresentadas e o valor obtido experimentalmente para o raio do próton de $0{,}82\,Fermi$ $(1\,Fermi = 10^{-15}\,m)$ e compare-a com seu valor experimental ($0{,}938\,GeV$).
b) Avalie a constante k do potencial que confina os *quarks* em unidades de $GeV/Fermi$.
c) Usando o valor de k obtido, calcule a massa de um méson (constituído por dois quarks) sob as mesmas hipóteses empregadas no caso do próton.
d) Dados os valores que se estimam para a massa dos *quarks* m_u e m_d, de uns poucos MeV, diga se a aproximação utilizada ao supor que os *quarks* eram não massivos resulta aceitável e avalie a velocidade a que se move um *quark* com uma massa $5\,MeV$ que tenha a energia calculada na aproximação de massa nula utilizada.

Dados:

$\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-34}\,Js$ $\qquad c = 2{,}99 \cdot 10^8\,{}^{m}/_{s}$ $\qquad 1\,GeV \equiv 1{,}602 \cdot 10^{-10}\,J$

$1m \equiv 10^{15} Fermi$ $\qquad m_d = 2{,}5 - 5\,MeV$ $\qquad m_u = 1{,}5 - 3\,MeV$ $\qquad m_\pi = 0{,}136\,GeV$

Nota: Neste problema o termo massa relaciona-se com o que, em alguns textos, é denominado massa em repouso. Do mesmo modo, se supõe que esta massa pode ser expressa em unidades de energia utilizando a relação de Einstein entre massa e energia.