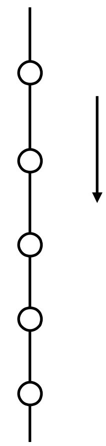
Problema 1: Dinámica de un ábaco vertical (20 puntos)

La figura muestra un sistema compuesto por cinco pequeñas cuentas elásticas idénticas, que se pueden mover por una varilla muy larga colocada verticalmente y apoyada en el suelo. La fricción entre las cuentas y la varilla puede ser despreciada y para todo el espacio que ocupa la varilla la aceleración de la gravedad puede considerarse constante e igual a g. En el instante $\boldsymbol{t_0}$, a cada cuenta se le comunica una velocidad diferente que puede estar dirigida hacia arriba o hacia abajo.



a) Determine el máximo número posible de choques ente las cuentas.
b) Encuentre una relación entre las velocidades iniciales de las cuentas para que, desde un sistema inercial ligado al suelo, transcurrido cierto intervalo de tiempo ***t***, la energía cinética sumaria de las mismas alcance de nuevo el valor inicial. Encuentre una expresión para ***t*** en función de g y las velocidades iniciales de las cuentas.
c) Suponga ahora que las cuentas se encontraban inicialmente en posiciones equidistantes, a distancia ***d*** entre dos contiguas y estando la más baja a una altura ***H*** del suelo. Describa alguna combinación para el movimiento de las mismas, con la cual la llegada de todas al suelo sea simultánea al cabo de un tiempo ***t´***. Encuentre una expresión para ***t´*** en función de ***H***, ***d***, g y las velocidades iniciales de las cuentas.

Solución:

a) (4 puntos). En el inciso "a" durante la revisión final se omitió, por error, la frase de que el cálculo del número máximo de choques debía hacerse "antes de que la cuenta más baja haga contacto con el suelo" que era como estaba concebido inicialmente el problema. Sin esta frase el inciso admite como respuesta que el número de choques es infinito para el caso en que consideren que los choques de la cuenta más baja con el piso sean elásticos.

Si el estudiante supuso por si mismo la frase omitida, entonces, la respuesta sería la que sigue:

Desde un sistema no inercial ***S`*** que descienda verticalmente con aceleración igual a la de gravedad ($\vec{g}$), actuaría sobre cada partícula (cuenta) además de la fuerza de gravedad ($\vec{F}_g = m\vec{g}$), una fuerza de inercia dirigida verticalmente hacia arriba ($\vec{F}_i = m\vec{a}_i$) siendo $\vec{a}_i = -\vec{g}$. La fuerza resultante sobre cada cuenta desde este sistema se sería nula, por lo que estas se moverían con M.R.U. (velocidades constantes).

Desde ***S`***, las partículas se mueven con velocidad constante, intercambiando velocidades cada vez que chocan elásticamente. Si construimos una gráfica de y´ en función del tiempo para el movimiento de las cuentas (Figura 1), podemos trazar las cinco rectas que corresponden a la función y´(t) para cada una. Los puntos de intersección de las rectas corresponderán a los choques. El máximo # de intersecciones se logra trazando rectas convergentes desde t_0 = 0, independientemente del sentido inicial que le demos al movimiento de las cuentas. El máximo # de intersecciones que se logra es 10, por tanto, se pueden producir como máximo 10 choques (después de estos choques, las rectas divergen).

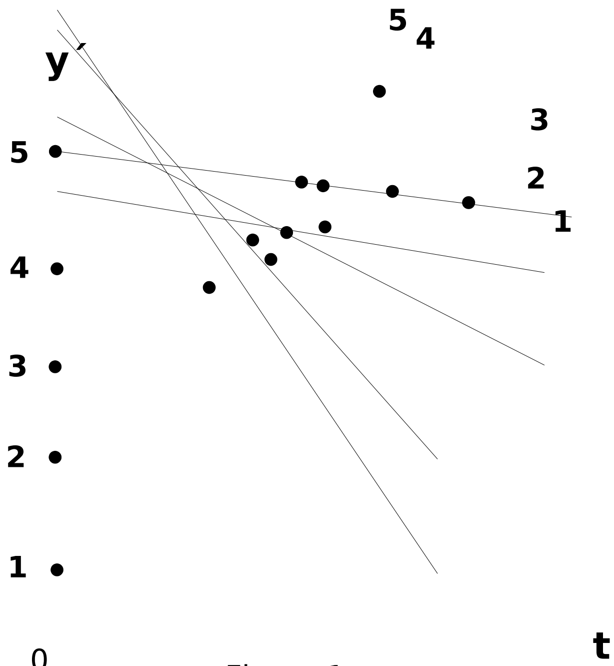


Figura 1

b) (8 puntos) Una relación posible es la siguiente. Desde un sistema inercial ligado al suelo, con el eje "y" dirigido hacia arriba, se pueden escribir las siguientes ecuaciones escalares en función del tiempo, mientras la cuenta inferior no haga contacto con el suelo:

$v_1 = v_{0_1} - ¿$

$v_2 = v_{0_2} - ¿$

$v_3 = v_{0_3} - ¿$

$v_4 = v_{0_4} - ¿$

$v_5 = v_{0_5} - ¿$

Obsérvese que estas ecuaciones no corresponden a las bolas individuales, durante los choques, las velocidades se intercambian, pero el efecto es el mismo como si cada bola siguiera las ecuaciones individualmente

Por formular este sistema (2 puntos)

Para el sistema: $\Delta K_T = \Delta K_1 + \Delta K_2 + \Delta K_3 + \Delta K_4 + \Delta K_5$ siendo $\Delta K_i = \frac{m}{2}\left(v_i^2 - v_{0_i}^2\right)$

$$\Delta K_i = \frac{m}{2}\left(v_{0_i}^2 - 2 v_{0_i} > + g^2 t^2 - v_{0_i}^2\right)$$

$\rightarrow \Delta K_T = mgt\left(-\sum_{i=1}^{5} v_{0_i} + 5\frac{¿}{2}\right)$ por llegar a esta expresión (3 puntos)

$\Delta K_T = 0$ para combinaciones en que $\sum_{i=1}^{5} v_{0_i} > 0$ y $t = \frac{2\sum_{i=1}^{5} v_{0_i}}{5g}$. O respuesta similar (3 puntos)

c) (8 puntos) Es posible tal combinación si desde S`, las velocidades de las cuentas convergen, pero de modo que se produzca un solo choque (Figura 2) justamente en el instante de llegar al suelo, que corresponde al origen de coordenadas en el sistema S asociado a Tierra. En la figura 3, se representan las posiciones iniciales de las cuentas y una posible combinación de velocidades (desde S).

S´ (desciende con aceleración g respecto al suelo)

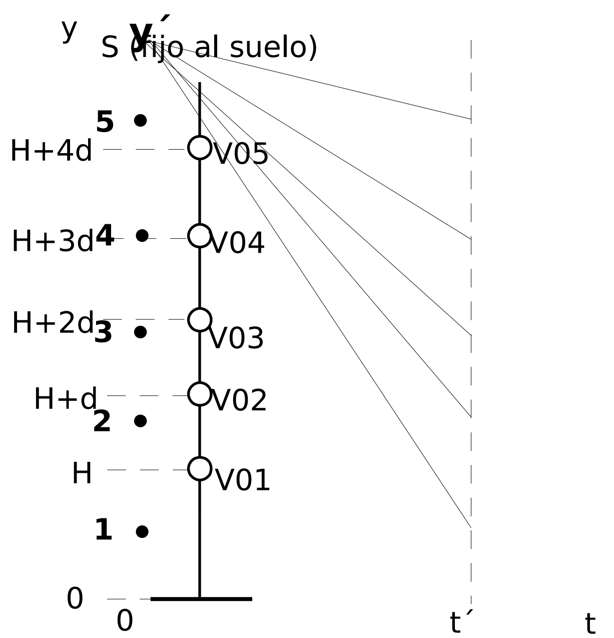


Figura 3 Figura 2

Las ecuaciones del movimiento de las partículas serán:

$$0=H+v_{01}t-\frac{gt'^2}{2}$$

$$0=H+d+v_{02}t-\frac{gt'^2}{2}$$

$$0=H+2d+v_{03}t-\frac{gt'^2}{2}$$

$$0=H+3d+v_{04}t-\frac{gt'^2}{2}$$

$$0=H+4d+v_{05}t-\frac{gt'^2}{2}$$

Por estas ecuaciones (4 puntos)

Sumando las ecuaciones:

$$0=5H+10d+\sum_{i=1}^{5}v_{0i}t-\frac{5}{2}gt'^2 \qquad \rightarrow t'^2-\frac{2}{5g}\sum_{i=1}^{5}v_{0i}t-\frac{2}{g}(H+2d)=0$$

$$\rightarrow \quad t=\frac{1}{5g}\left[\sum_{i=1}^{5}v_{0i}+\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{5}v_{0i}\right)^2+50g(H+2d)}\right]$$

Por llegar a esta expresión arriba (4 puntos)