Problema 3: Detectando el monopolo magnético (20 puntos)

Usualmente, las ecuaciones de Maxwell se formulan de la siguiente forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (1) \qquad\qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J_e} \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e \qquad (3) \qquad\qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (4)$$

donde $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, ρ_e y $\vec{J_e}$ son el campo eléctrico, el campo magnético, la densidad de flujo eléctrico, la densidad de flujo magnético, la densidad de carga eléctrica, y la densidad de corriente eléctrica, respectivamente.

Algunos modelos teóricos sugieren la existencia de monopolos magnéticos (análogos a la carga eléctrica), y predicen que cada uno de ellos ha de tener una magnitud de $4 \times 10^{15}\, Tm^2$. De ser correcta la teoría, las ecuaciones de Maxwell pudieran "completarse" agregando adecuadamente los términos ρ_m y $\vec{J_m}$, que representarían la densidad de carga magnética y la densidad de corriente de carga magnética, respectivamente, asociadas a los monopolos magnéticos.

a) Escriba cómo quedarían las ecuaciones de Maxwell, suponiendo la existencia de monopolos magnéticos.

b) Aunque hasta hoy no se ha podido probar experimentalmente su existencia, desde el principio de la década de 1980 se han estado tratando de detectar los monopolos magnéticos utilizando un anillo superconductor situado en un ambiente apantallado, donde se minimiza el ruido magnético "convencional". Utilice las ecuaciones de Maxwell por usted modificadas para demostrar que, midiendo el flujo magnético en el hueco del anillo superconductor, se puede detectar el eventual paso de un monopolo magnético a través del mismo. Suponga que dentro del material superconductor del cual está hecho el anillo, se cumple siempre la condición $\vec{E} = 0$, y que $\vec{B}$ es uniforme en el orificio del anillo.

c) Suponga que el anillo superconductor se ha conformado a partir de una lámina superconductora de alta temperatura crítica cuyo grosor es de 1 μm, de modo que el plano del orificio está en el plano de la lámina. ¿Cuál es, aproximadamente, el máximo radio interior que puede poseer el anillo si se pretende detectar un monopolo magnético con el dispositivo inmerso en un refrigerante a T ≈ 77 K, considerando solamente los efectos del ruido térmico? Suponga que $\vec{B}$ es uniforme dentro del orificio del anillo, y que es nulo dentro del material superconductor.

RESPUESTA

(a) Esta pregunta vale 6 puntos: 3 puntos por escribir la ecuación (1), y otros 3 puntos por escribir la ecuación (4).

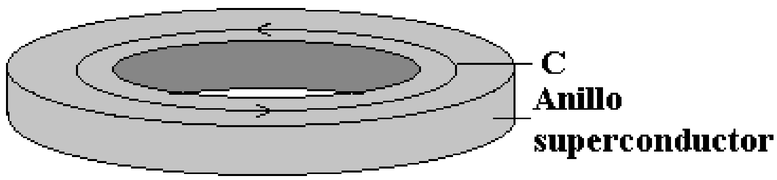
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} - \vec{J}_m \qquad \text{(R1)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial D}{\partial t} + \vec{J}_e \qquad \text{(R2)}$$

$$\nabla\cdot D = \rho_e \qquad \text{(R3)}$$

$$\nabla\cdot B = \rho_m \qquad \text{(R4)}$$

(b)Esta pregunta vale 8 puntos. Integrando (R1) sobre la superficie S limitada por el contorno C según la siguiente figura:



y aplicando el Teorema de Stokes, obtenemos :

$$\oint_C \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot\vec{ds} - \int_S \vec{J}_m\cdot\vec{ds}$$ 2 puntos

Como $E = 0$ dentro del superconductor ,

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot\vec{ds} - \int_S \vec{J}_m\cdot\vec{ds} = 0$$ 1 punto (R5)

Definamos :

$\phi_s = \int_S \vec{B}\cdot ds$ como el flujo magnético que atraviesa el contorno C

$I_m = \frac{d}{dt}Q_m = \int_S \vec{J}_m\cdot\vec{ds}$ como la corriente de "carga magnética" que atraviesa el contorno C.

Sustituyendo en R5 estas definiciones y suponiendo que B es uniforme dentro del orificio del anillo :

$\frac{d}{dt}\left(\phi_s + Q_m\right) = 0$ 5 puntos (con la explicación de abajo incluida)

O sea, si una carga magnética atraviesa C en cualquier dirección ó con cualquier velocidad, el flujo magnético ϕ_s asociado al mismo contorno se "adapta" para que la suma de ambos sea constante. Así, una variación de flujo magnético de unos 4×10^{-15} Tm^2 medido con la ayuda del magnetómetro (ó un múltiplo entero de ese valor) puede ser interpretado como el paso de una "carga magnética" a través del anillo superconductor.

(b)Esta pregunta vale 6 puntos
Aún si somos capaces de apantallar todos los "ruidos" magnéticos externos convenientemente, pueden haber variaciones del estado superconductor asociadas a fluctuaciones térmicas que afecten el experimento. Si la energía media de estas fluctuaciones a T $\approx$ 77 K, E_T, es igual ó mayor que la energía magnética asociada al paso de un monopolo magnético, E_{mm}, no es posible realizar la detección. O sea, para que nuestro dispositivo funciones, debe cumplirse la condición:

$$E_T < E_{mm}$$ 2 puntos (R6)

La energía térmica a 77 K, vale:

$$E_T = \frac{1}{2}k_B T = \frac{1}{2}\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\, J/K \cdot 77K = 5{,}3\cdot 10^{-22}\, J$$ 1 punto (R7)

donde k_B es la constante de Boltzmann. Se admite que utilicen kT o 3/2 kT. La energía magnética asociada a B dentro del volumen acotado por la trayectoria C y las superficies planas del anillo, es:

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0}\iiint_V \vec{B}^2 dv = \frac{1}{2\mu_0}\left\{\iiint_{V_{orificio}} \vec{B}^2 dv + \iiint_{V_{sc}} \vec{B}^2 dv\right\}$$

Como $B = 0$ dentro del material superconductor, y suponiendo B uniforme dentro del orificio:

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0}\iiint_{V_{orificio}} \vec{B}^2 dv = \frac{B^2}{2\mu_0}V_{orificio} = \frac{B^2}{2\mu_0}\pi r^2 d = \frac{1}{2\mu_0}\phi^2 \frac{d}{\pi r^2}$$ 2 puntos

donde *d* es el grosor del anillo, *r* es su radio interior, y ϕ es el flujo magnético que atraviesa el contorno C. Si sustituimos valores para $\phi = 4\times10^{-15}$ Tm^2:

$$E_{mm} = \frac{\left(4\cdot 10^{-15}Tm^2\right)^2\cdot 10^{-6}m}{2\cdot 1{,}26\cdot 10^{-6}\, H/m}\cdot\frac{1}{\pi r^2} = 6{,}35\cdot 10^{-30}\frac{1}{\pi r^2}\, J$$ R8

Sustituyendo R7 y R8 en R6:

$$5{,}3 \cdot 10^{-22} J < \frac{6{,}35 \cdot 10^{-30}}{\pi} \cdot \frac{1}{r^2} J \Rightarrow r < 0{,}63 \cdot 10^{-4} m \Rightarrow r < 63 \mu m$$ 1 punto

Aunque este anillo "de alta temperatura" ha sido diseñado expresamente para el presente problema, sus dimensiones no han de ser muy lejanas de las que se utilizan en la práctica. Entonces no es de extrañar que, de existir, sea bien difícil detectar el monopolo magnético: ¡Hay que esperar a que uno de ellos "se le ocurra" atravesar nuestro minúsculo anillo superconductor!