Problema 4: Ondas gravitacionales.[1] (20 puntos)

En 1916 Albert Einstein predijo que las masas aceleradas emiten OG que se propagan con la misma rapidez (c) que la luz en el vacío y a su paso deforman el espacio, modificando las dimensiones de los cuerpos que lo ocupan. Estas ondas fueron detectadas por primera vez el 14 de septiembre de 2015 en un evento astrofísico identificado como GW150914 y permitieron observar, también por primera vez: i) agujeros negros de masa mayor que 30 veces la masa M_O del Sol ii) un sistema de dos agujeros negros que giran alrededor de su centro de masas común iii) la evolución de ese sistema en espiral hasta la fusión de los dos agujeros negros. El premio Nobel de Física 2017 fue otorgado a R. Weiss, B. C. Barish y K. S. Thorne por sus decisivas contribuciones a la creación del detector LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Waves Observatory*) y a la observación de las OG.

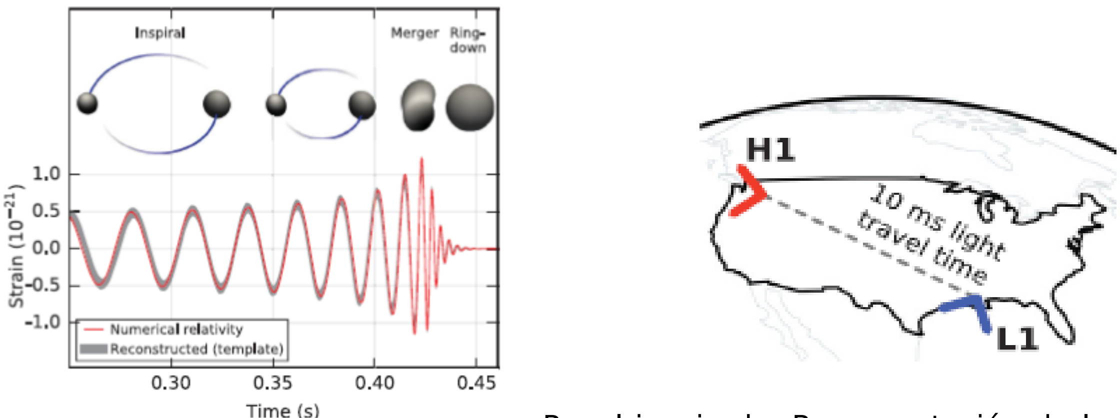


Fig. 1 Panel izquierdo. Representación de la evolución del sistema binario de agujeros negros observado y de la deformación relativa de una longitud durante el paso de la GW150914 por uno de los observatorios LIGO. Panel derecho. Localización de los detectores del experimento LIGO que detectaron la GW150914 en Livingston (L1) y Hanford (H1).

La evolución del sistema binario antes de su fusión puede describirse aproximadamente con la mecánica newtoniana.

a) Demuestre que si los agujeros negros se representan por dos masas puntuales m_1, m_2 situadas a la distancia d, que giran en órbitas circulares con velocidad angular ω respecto a su centro de masa, se cumple que:

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{d^3}$$

donde G es la constante de gravitación universal.

b) Demuestre que la energía mecánica del sistema binario cuando su centro de masas está en reposo se puede expresar como:

$$E = \frac{-G m_1 m_2}{2d} = \frac{-G^{2/3} m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)^{1/3}} \omega^{2/3}$$

c) Al disminuir la distancia entre los agujeros negros, su energía mecánica disminuye por la emisión de OG, cuya frecuencia $f = \frac{\omega}{\pi}$ aumenta con el tiempo. De acuerdo a la Teoría General de la Relatividad, la potencia emitida es proporcional al cuadrado del momento de inercia I y viene dada por:

$$P = \frac{32 G}{5 c^5} I^2 \omega^6$$

1 Este problema está inspirado en los artículos: B.P. Abbott et al., *The basic physics of the binary black hole merger GW150914*, Ann. Phys. (Berlin) 529, No. 1-2, 1600209 (2017) y H Mathur, K Brown, A Lowenstein, *An analysis of the LIGO discovery based on Introductory Physics*, American Journal of Physics 85 (9), 676 (2016). Las figuras fueron tomadas de B. P. Abbott et al., PRL, 116, 061102 (2016).

La forma en que f evoluciona en el tiempo está relacionada con la denominada "masa de chirrido" (chirp mass): $M \equiv \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1+m_2)^{\frac{1}{5}}}$. Suponiendo que la potencia emitida en forma de OG es igual a la pérdida de energía mecánica del sistema, demuestre que la "masa de chirrido" está dada por:

$$M=\frac{c^3}{G}\left(\frac{5}{96}\pi^{\frac{-8}{3}} f^{\frac{-11}{3}} \frac{df}{dt}\right)^{\frac{3}{5}}$$

Las mediciones de f y su derivada temporal $\frac{df}{dt}$en el evento GW150914 permitieron determinar M $30\,M_{\odot}$.

d) Asuma que los agujeros negros tienen masas iguales. Estime el valor de la masa de cada agujero negro, en términos de la masa solar $M_{\odot}$ y calcule su separación $d_0$cuando la frecuencia de la OG alcanzó su valor máximo ($f_{max}=150\,Hz$)

e) La mínima distancia a la que un objeto puede acercarse a un agujero negro, llamada radio de Schwarzschild, es aquella a la que ni siquiera la luz puede escapar de su atracción. Demuestre que la separación calculada en el inciso anterior es mayor que la mínima distancia a la que pueden acercarse dos agujeros negros antes de su fusión.

f) Calcule la energía emitida en forma de OG, durante la evolución del sistema binario, desde que los agujeros negros estaban separados por una distancia muy grande hasta que estuvieron a la distancia d_0. Exprese esa pérdida de energía en función de $M_{\odot}$.

g) ¿Cómo Ud. explica que la onda gravitacional GW150914 demoró aproximadamente 7 ms en llegar del observatorio LIGO en Livingston al de Hanford, si la distancia entre los dos observatorios es de $3000\,km$?

Para los cálculos use $G=6.67\cdot 10^{-11}\frac{m^3}{s^2\cdot kg}$;$c=2.99\cdot 10^8\frac{m}{s}$; $M_{\odot}=2.00\cdot 10^{30}\,kg$.

Respuestas:

a) (2 puntos) Sean d_1 y d_2 las distancias del centro de masa del sistema binario a los cuerpos puntuales de masas m_1 y m_2, $F_G=G\frac{m_1 m_2}{d^2}$ y la fuerza centrípeta es $F_C=m_1\omega^2 d_1=m_2\omega^2 d_2$. Con $F_G=F_C$:

$$G\frac{m_1 m_2}{d^2}=m_1\omega^2 d_1 \quad \text{, de donde} \quad G\frac{m_2}{d^2}=\omega^2 d_1$$

$$G\frac{m_1 m_2}{d^2}=m_2\omega^2 d_2 \quad \text{, de donde } G\frac{m_1}{d^2}=\omega^2 d_2$$

$$G\frac{m_1}{d^2}+G\frac{m_2}{d^2}=\omega^2(d_1+d_2).$$

$$\omega^2=\frac{G(m_1+m_2)}{d^3}$$

<u>Nota</u>: Esta relación es un caso particular de la tercera ley de Kepler que establece una proporcionalidad directa entre el cuadrado del período ($T=\frac{2\pi}{\omega}$) y el cubo del diámetro de la órbita d.

b) (4puntos) Si el centro de masa se encuentra en reposo, la energía mecánica viene dada por:

$$E=K+U=\frac{1}{2}I\omega^2-G\frac{m_1m_2}{d}$$

El momento de inercia I con respecto a un eje perpendicular al plano de rotación y que pasa por el centro de masa, viene dado por $I=m_1d_1^2+m_2d_2^2$, donde d_1, d_2 son las distancias de los cuerpos al centro de masa y $d=d_1+d_2$,

$$0=\frac{-d_1m_1+d_2m_2}{m_1+m_2}$$

Luego $d_1m_1=d_2m_2$. De donde, con $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$, se obtiene:

$$d_1=\frac{m_2}{m_1}d_2=\frac{m_2}{m_1+m_2}d;\quad d_2=\frac{m_1}{m_2}d_1=\frac{m_1}{m_1+m_2}d$$

$$I=m_1d_1^2+m_2d_2^2=m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}d\right)^2+m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}d\right)^2=\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)d^2$$

$$I=\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)d^2$$

Por el cálculo de momento de inercia: 2 puntos

Nota: Esta expresión se puede escribir también como $I=\mu d^2$ donde $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ es la masa reducida del sistema.

Sustituyendo $d=\left[G\frac{(m_1+m_2)}{\omega^2}\right]^{1/3}$), se obtiene E en función de la velocidad angular ω:

$$E=\frac{-Gm_1m_2}{2d}=\frac{-G^{2/3}m_1m_2}{2(m_1+m_2)^{1/3}}\omega^{2/3}$$

Por el cálculo de la energía: 2 puntos

Nota: Si no se considera otra forma de energía, esta es la energía interna del sistema binario.

c) (5 puntos) Sustituyendo $I=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}d^2$ con $d=\left[G\frac{(m_1+m_2)}{\omega^2}\right]^{1/3}$ resulta la igualdad:

$$P=\frac{32}{5}I^2\omega^6Gc^{-5}=\frac{32}{5c^5}G^{7/3}\omega^{10/3}\frac{(m_1m_2)^2}{(m_1+m_2)^{2/3}}$$

Por este cálculo de P arriba (1.5 puntos)

Por otra parte, de $E=\frac{-G^{2/3}m_1m_2}{2(m_1+m_2)^{1/3}}\omega^{2/3}$

$$P = \frac{-dE}{dt} = \frac{-d\left[\frac{-G^{\frac{2}{3}} m_1 m_2}{2(m_1+m_2)^{\frac{1}{3}}} \omega^{\frac{2}{3}}\right]}{dt} = \frac{1}{3} \frac{G^{2/3} m_1 m_2}{(m_1+m_2)^{1/3}} \omega^{\frac{-1}{3}} \frac{d\omega}{dt}$$

Por este cálculo de P arriba (2 puntos)

$$\frac{32}{5c^5} G^{7/3} \omega^{10/3} \frac{(m_1 m_2)^2}{(m_1+m_2)^{2/3}} = \frac{-d\left[\frac{-G^{\frac{2}{3}} m_1 m_2}{2(m_1+m_2)^{\frac{1}{3}}} \omega^{\frac{2}{3}}\right]}{dt} = \frac{1}{3} \frac{G^{2/3} m_1 m_2}{(m_1+m_2)^{1/3}} \omega^{\frac{-1}{3}} \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^{1/3}} = \frac{5c^5}{96} G^{-5/3} \omega^{-11/3} \frac{d\omega}{dt}$$

Considerando que $f = \frac{\omega}{\pi}$ y elevando ambos miembros a 3/5:

$$M¿ \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1+m_2)^{1/5}} = \frac{c^3}{G} \left(\frac{5}{96} \pi^{-8/3} f^{-11/3} \frac{df}{dt}\right)^{3/5}$$

Por obtener esta expresión (1.5 puntos)

d) (2 puntos) Usando como dato M $30\, M_\odot$ y $m_1 = m_2 = m$ en M¿ $\frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1+m_2)^{1/5}}$, se obtiene

$$m \quad \sqrt[5]{2}(30\, M_\odot) \quad (1{,}14869\ldots)(30\, M_\odot) \quad 1{,}15(30\, M_\odot) \quad 34{,}46\, M_\odot \quad 34{,}5\, M_\odot$$

$$m_1 = m_2 \quad 34{,}5\, M_\odot.$$

<u>Nota</u>: El valor obtenido en este problema de $m_1 = m_2 \quad 34{,}5\, M_\odot$, concuerda satisfactoriamente con los estimados en el experimento LIGO, de las masas iniciales de los agujeros negros del sistema binario ($36^{+5}_{-4} M_\odot$ y $29^{+4}_{-4} M_\odot$).

Sustituyendo $m_1 + m_2 \quad 69\, M_\odot$ y $\omega = \pi f_{max}$ en $d = \left[G \frac{(m_1+m_2)}{\omega^2}\right]^{1/3}$, donde $f_{max} = 150\, Hz$:

$$d_0 = \left[G \frac{(69\, M_\odot)}{\omega^2}\right]^{1/3} = \left[\frac{69\, M_\odot}{(\pi f_{max})^2}\right]^{1/3} \quad 346\, km \quad 350\, km.$$

e) (3 puntos) La menor distancia a la que pueden acercarse dos agujeros negros es $2R_S$ donde el radio de Schwarzschild se determina de la condición de que un cuerpo en reposo situado a distancia menor que R_S de un agujero negro no puede alejarse del mismo. Esto implica que:

$$m' c^2 - \frac{Gmm'}{r} < 0$$

$$r < \frac{Gm}{c^2} = R_S$$

Si se calcula $R_S$considerando $m \quad 35\, M_\odot$ se obtiene $R_S \quad 104\, km$. La separación mínima entre los agujeros negros debe ser $d_{min} = 2R_S \quad 208\, km$. Puesto que $350\, km > 208\, km$ no hay contradicción en suponer que la fusión de los agujeros negros no había ocurrido cuando la frecuencia de las OG alcanzó su valor máximo. Este resultado es consistente con el valor estimado en el experimento de una separación $\gtrsim 210\,km$ entre ambos agujeros negros cuando la frecuencia orbital estimada fue$f_{Orb}=75\,Hz$.

f) (2 Puntos) Considerando que inicialmente los agujeros negros están muy distantes entre sí ($d\rightarrow\infty$) se obtiene $E_i=0$, y que toda la energía que pierde el sistema es exactamente la energía que se irradia en forma de OG, se puede escribir:

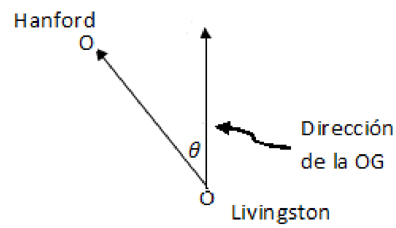
$$E_{OG}=E_i-E_f=0-\left(\frac{-G\,m_1\,m_2}{2\,d}\right)=\frac{G\,m_1\,m_2}{2\,d}$$

Con $m_1=m_2=35\,M_\Theta$, $d=350\,km$, $G=6{,}67\cdot10^{-11}\frac{m^3}{s^2\,kg}$;$c=3\cdot10^8\frac{m}{s}$; $M_\Theta=2{,}0\cdot10^{30}\,kg$:

$$E_{OG}\;\;46{,}22\cdot10^{46}\,kg\frac{m^2}{s^2}\;\;(5{,}14\cdot10^{30}\,kg)\,c^2\;\;2{,}6\,M_\Theta\,c^2$$

Nota: Cálculos más precisos permitieron estimar que la masa del agujero negro formado por la fusión resultó $3^{+0{,}5}_{-0.5}M_\Theta$ menor que la masa inicial del sistema binario.

g) (2 puntos) La distancia de $3000\,km$ es recorrida por la luz en aproximadamente $10\,ms$. Por lo tanto, si demoró $7\,ms$, es porque la OG (que tiene la misma rapidez de propagación que la luz en el vacío) no recorrió la distancia que hay entre los dos detectores del observatorio LIGO, sino una distancia D menor: $D=c\cdot\Delta t=\left(3\cdot10^8\frac{m}{s}\right)(7\,ms)=2100\,km$. Eso significa que la OG no se propagó en la dirección de la línea recta que une ambos detectores. El frente de la OG GW150914 pasó primero por el detector de Livingston y 7 ms después por el de Hanford, en una dirección que forma un ángulo $\theta\neq0$ como se ilustra en la figura.



$$\theta\;\;\cos^{-1}\frac{7\,ms}{10\,ms}\;\;45{,}6\,°$$

Este valor de θ significa que la dirección de la OG forma un ángulo de unos $45\,°$ con relación a la dirección entre el laboratorio de Livingston, al cual llegó primero la OG y el de Hanford, al cual la OG llegó con un retardo de $7\,ms$.

Nota Según estos cálculos se puede concluir que la OG GW150914 surgió en algún lugar del universo que está en un círculo que forma un cono de ángulo $\theta\;\;45{,}6\,°$ con vértice en el observatorio de Livingston. Es imposible determinar la posición de esa fuente con mediciones en solamente dos observatorios. Se necesitaría detectar la OG, al menos en tres lugares de la Tierra. Entonces, la intersección de los vectores de posición relativa entre los tres detectores y conociendo el tiempo de retardo se podría precisar la dirección de propagación de la OG a su paso por nuestro planeta. El valor estimado en el descubrimiento de GW150914 es de $45\,°$ (B.P. Abbott et al., *The basic physics of the binary black hole merger GW150914*).