# Solución

# Pregunta 1

En figura 1 se muestra la configuracion de los quarks en el proton en que las distancias entre ellos son iguales y no varian con el tiempo. Claramente, las

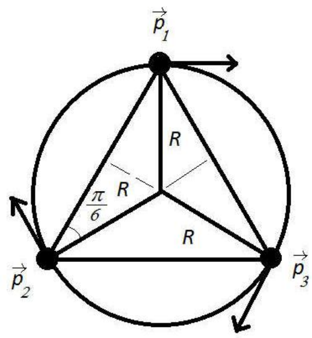


Figura 1

fuerzas del potencial de confinamiento, cuya resultante sobre cada uno delos tres quarks, está dirigida en la dirección del centro de la circunferencia. Esa fuerza debe actuar como fuerza centrípreta del movimiento circular de cada quark. Como los tres movimientos son identicos, basta con plantear la ecuación de Newton para uno de ellos. Considerando el quark tipo 1 se puede escribir

$$\frac{d\overrightarrow{p}_1}{dt} = \overrightarrow{F}_{12} + \overrightarrow{F}_{13}, \tag{1}$$

donde $\overrightarrow{F}_{12}$ y $\overrightarrow{F}_{13}$ son las fuerzas sobre la particula 1 que hacen los quarks 2 y 3. Como el potencial entra la partícula 1 y la 2, por ejemplo, tiene la expresión

$$V(\overrightarrow{x}_1 - \overrightarrow{x}_2) = k\ |\overrightarrow{x}_1 - \overrightarrow{x}_2|, \tag{2}$$

se tiene que las fuerzas que hacen las paticulas 2 y 3 sobre la 1 son dadas por

$$\overrightarrow{F}_{12} = -k\ \overrightarrow{\nabla}\ |\overrightarrow{x}_1 - \overrightarrow{x}_2| = -k\frac{\overrightarrow{x}_1 - \overrightarrow{x}_2}{|\overrightarrow{x}_1 - \overrightarrow{x}_2|}, \tag{3}$$

$$\overrightarrow{F}_{13} = -k\ \overrightarrow{\nabla}\ |\overrightarrow{x}_1 - \overrightarrow{x}_3| = -k\frac{\overrightarrow{x}_1 - \overrightarrow{x}_3}{|\overrightarrow{x}_1 - \overrightarrow{x}_3|}. \tag{4}$$

Por tanto, proyectando ambas fuerzas sobre la dirección del radio que va del quark 1 al centro de la esfera, se tiene para la fuerza neta sobre el quark 1:

$$\overrightarrow{F}_{12} + \overrightarrow{F}_{13} = -2\ k\ Cos[\frac{\pi}{6}]\frac{\overrightarrow{R}}{R}, \tag{5}$$

donde $\overrightarrow{R}$ es el vector que va del centro de la circunferencia al quark 1 y cuyo módulo es el radio $R$. Veamos ahora la derivada temporal del momentum del quark 1. Para ello consideremos

$$\frac{d\overrightarrow{p}_1}{dt} = -\frac{\hbar\ w}{c}\frac{d\theta}{dt}\frac{\overrightarrow{R}}{R}, \tag{6}$$

donde $d\theta$ es el incremento angular asociado al desplazamiento del quark 1 sobre la cirunferencia en el intervalo de tiempo $dt$. Pero la longitud recorrida por esa partícula sobre la circunferencia en el tiempo $dt$ y moviendose a la velocidad de la luz es: $c\ dt$ . Así el incremento en el ángulo será igual a

$$d\theta = \frac{c\ dt}{R}, \tag{7}$$

que permite obtener

$$\frac{d\overrightarrow{p}_1}{dt} = -\frac{\hbar\ w}{R}\frac{\overrightarrow{R}}{R}. \tag{8}$$

Igualando las expresiones de la fuerza y la variación del impulso se tiene

$$2\ k\ Cos[\frac{\pi}{6}] = \frac{\hbar\ w}{R}. \tag{9}$$

## Energia total

Pero la energía total del protón se puede escribir como la suma de las tres energías del movimiento de los quarks más las tres energías potenciales entre quarks

$$E_p = 3\hbar\ w + 3kD, \tag{10}$$

donde $D$ es la distancia entre quarks, que de la figura se sigue que tiene la siguiente expresión en términos del radio $R$:

$$D = 2\ Cos(\frac{\pi}{6})R. \tag{11}$$

La energía entonces tiene la forma

$$\begin{aligned} E_p &= 3\hbar\ w + 3kD \\ &= 6\ \hbar\ w, \qquad (12) \\ \hbar\ w &= kD. \qquad (13) \end{aligned}$$

## Cuantizacion

Impongamos ahora la condición de cuantizacion de Bohr. Teniendo en cuenta que el perímetro de las órbitas es $L = 2\pi R$ se tiene

$$\begin{aligned} p\ L &= 2\pi\ m\ \hbar \\ &= p\ 2\pi R, \qquad (14) \end{aligned}$$

de la cual se sigue:

$$p = \frac{m\ \hbar}{R} = \frac{\hbar\ w}{c}, \tag{15}$$

que sustituída en la expresión para la energía total lleva a

$$\begin{aligned} E_p &= 6\ \hbar\ w. \\ &= 6\frac{m\ \hbar\ c}{R}. \end{aligned} \tag{16}$$

El estado de menor energía se obtiene para $m = 1$ . Evaluando los valores de los parámetros en el Sistema Internacional para este caso se tiene

$$E_p = 2.31331 \times 10^{-10}\ \text{J}.$$

Utilizando el factor de conversión de Joules a GeV (1 GeV $\equiv$ 1.60217653 $10^{-10}$ J) se tiene

$$E_p = 1.44401\ \ \text{GeV} \tag{17}$$

que resulta un valor del orden, pero un poco más grande que la masa observada del protón: 0.938 GeV.

# Pregunta 2

Utilizando las relaciones ya obtenidas

$$2\ k\ Cos[\frac{\pi}{6}] = \frac{\hbar\ w}{R}. \tag{18}$$

$$\frac{\hbar}{R} = \frac{\hbar\ w}{c}, \tag{19}$$

se llega a

$$k = \frac{\hbar c}{2Cos[\frac{\pi}{6}]R^2}\ \text{J m}^{\text{-1}}, \tag{20}$$

cuyas unidades en el sistema internacional son Joules divididos por metros. Pero

$$1\ \text{J} \equiv \frac{10^{10}}{1.602}\text{GeV}, \tag{21}$$

$$1\ \text{m} \equiv 10^{15}\ \ \text{fermi}\ , \tag{22}$$

lleva al siguiente valor para la llamada "constante de la cuerda" :

$$k = \frac{\hbar c}{2Cos[\frac{\pi}{6}]R^2}\ \frac{10^{-5}}{1.602}\frac{\text{GeV}}{\text{Fermi}} \tag{23}$$

$$= 0.16944\ \ \frac{\text{GeV}}{\text{Fermi}}. \tag{24}$$

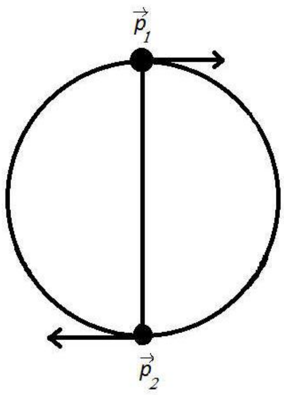


Figura 2

# Pregunta 3

En la figura 2 se muestra el diagrama asociado a los mesones.

Planteando la ecuacion de Newon para el quark 1 por ejemplo se obtiene

$$-k\frac{\overrightarrow{R}}{R} = -\frac{\hbar\ w}{c}\frac{d\theta}{dt}\frac{\overrightarrow{R}}{R}, \tag{25}$$

que nuevamente considerando que el cambio en el ángulo del vector de posición del quark es $d\theta = \frac{c\ dt}{R}$, debido a que la partícula se mueve a la velocidad de la luz, permite escribir

$$k\ R = \hbar\ w. \tag{26}$$

Considerando entonces que la energía del meson es la suma de las dos energías cinéticas de los quarks más la energía potencial entre ellos se tiene

$$E_m = 2\ \hbar\ w +\ k\ R \tag{27}$$
$$= 3\ k\ R. \tag{28}$$

Pero expresando $k$ en Gev por fermi y utilizando que un mesón tiene un tamaño de 0.62 fermi se tiene

$$E_m = 3 \times 0.16944 \times 0.6\ \ \text{GeV} \tag{29}$$
$$= 0.304992\ \text{GeV}, \tag{30}$$

que es nuevamente del mismo orden que la masa en reposo observada del mesón $\pi$: $M_\pi = 0.138.57$ GeV pero cerca de dos veces mayor.

# Pregunta 4

La energía de movimiento de cada uno de los quarks en el protón es

$$\hbar\ w = \frac{E_p}{6} = \frac{1.44401}{6} \quad \text{GeV} \tag{31}$$
$$\equiv 0.240644 \quad \text{GeV} \tag{32}$$
$$\equiv 240.644 \quad \text{MeV}, \tag{33}$$

lo cual indica que esa energía de movimiento es cerca de 48 veces más grande que la mayor de las masas en reposo de los quarks $u$ y $d$, lo cual indica que el movimiento es relativista. La velocidad del movimiento de un quark asumiendo un valor de masa de los más pesados debe satisfacer

$$240.644 = \frac{5}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \tag{34}$$

de la cual, despejando se obtiene

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - (\frac{5}{240.644})^2} \tag{35}$$
$$= 0.999784. \tag{36}$$

Es decir, los quarks según el modelo usado se mueven a una velocidad muy cercana a la de la luz.