



**TERCEIRA OLIMPIÁDA LATINOAMERICANA E DO CARIBE
UNIVERSITÁRIA DE FÍSICA (OLUF)**

26 de abril de 2019, 15h hora de Brasília



DADOS PESSOAIS:

Nome: _____

Universidade: _____

País: Brasil **Curso:** _____ **Ano:** _____

E-mail: _____

ASSINATURA: _____

PONTUAÇÕES: 1:___ , 2:___ , 3:___ , 4:___ **TOTAL:**_____

AS SOLUÇÕES:

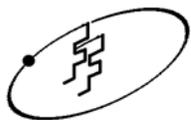
- As soluções a problemas diferentes devem se escrever em folhas separadas.
- É permitido o uso de calculadoras.

PONTUAÇÃO:

- O valor de cada problema se encontra escrito no enunciado correspondente. Serão dados pontos para soluções parciais.

DURAÇÃO:

- 4 horas.



Problema 1: Espectrometria de Retrodispersão de Rutherford¹ (25 pontos)

Uma técnica moderna para caracterizar camadas delgadas de materiais, conhecida como *Espectrometria de Retrodispersão de Rutherford* (ERR) baseia-se em fazer com que incidam íons leves de massa e energia cinética conhecidas sobre a superfície de uma amostra e medir a energia cinética dos íons espalhados numa determinada direção. Com o adequado processamento das medidas e da quantidade de íons dispersados em função da energia cinética, pode-se saber quantos e quais elementos químicos compõem a amostra, em suas proporções, seus perfis de concentração, quantas camadas delgadas se tem (caso exista mais do que uma) e a espessura de cada uma. Os itens seguintes deste problema são, de fato, uma boa primeira aproximação à ERR, utilizando conhecimentos de Física Geral.

No sistema de referência do laboratório, um choque de duas partículas pode ser representado como na figura 1.1. Quando uma partícula de massa m e energia cinética E_0 colide elasticamente com outra de massa M ($M > m$) que está em repouso no sistema de referência do laboratório, a partícula incidente é espalhada com uma energia cinética E_1 segundo um ângulo θ em relação com a direção de incidência. A proporção:

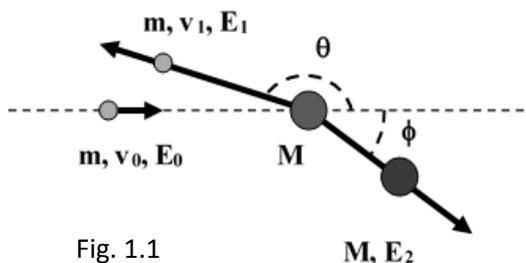


Fig. 1.1

$$\frac{E_1}{E_0} = K(m, M, \theta)$$

é o chamado *fator cinemático* e satisfaz a seguinte igualdade:

$$K(m, M, \theta) = \left[\frac{\left(1 - \left(\frac{m}{M}\right)^2 \sin^2 \theta\right)^{1/2} + \frac{m}{M} \cos \theta}{1 + \frac{m}{M}} \right]^2 \quad (1)$$

Para valores prefixados de m e θ , o valor de K depende só de M e pode-se escrever $K_M = \frac{E_1}{E_0}$. A tabela I contém os valores de K_M para alguns elementos químicos.

Tabela I			
Elemento químico	Z	M (u)	K_M [íons: ${}^4\text{He}$, $\theta = 165^\circ$]
He	2	4,003	-
C	6	12,011	0,255
O	8	15,999	0,366
Al	13	26,981	0,549
Si	14	28,086	0,567
Ti	22	47,900	0,719
Zn	30	65,370	0,784
Te	52	127,600	0,884
Pt	78	195,090	0,922
Au	79	196,670	0,923
Pb	82	207,190	0,927

a) Quando um feixe de íons de energia cinética E_0 incide sobre uma amostra sólida, uma parte de eles é dispersada ao colidir com núcleos atômicos na superfície da amostra, e outra parte ao colidir com núcleos dentro do material. A energia dos íons retrodispersados na superfície por núcleos de massa M na direção θ é $K_M E_0$. Por outro lado, os que penetram na amostra perdem energia cinética durante seu movimento dentro dela, e os que emergem na direção θ tem uma energia cinética $K_M E_0 - \Delta E_M$. Assumindo que a camada delgada

¹ O espectro reportado neste problema é inspirado naquele utilizado no artigo: S. Larramendi, F. C. Zawislak, M. Behar, E. Pedrero, M. Hernández Vélez, O. de Melo, J. Crystal Growth 312 (2010) 892- 896



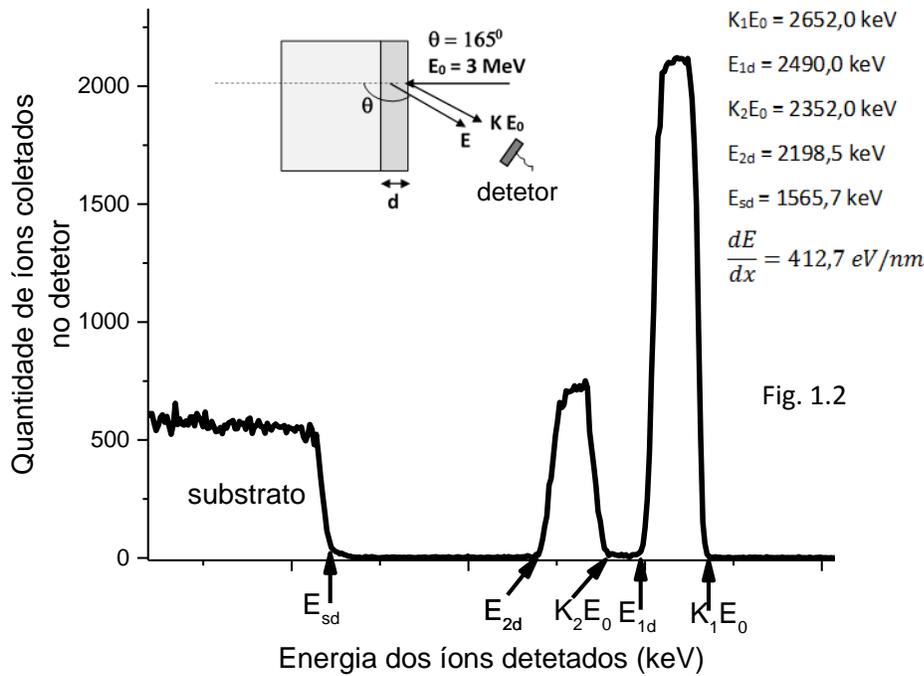
**TERCEIRA OLIMPIÁDA LATINOAMERICANA E DO CARIBE
UNIVERSITÁRIA DE FÍSICA (OLUF)
26 de abril de 2019, 15h hora de Brasília**



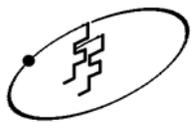
superficial tem espessura d e que a perda de energia cinética por unidade de comprimento ($\frac{dE}{dx} > 0$) é constante, demonstre que:

$$\Delta E_M = \left(K_M + \frac{1}{|\cos \theta|} \right) \left(\frac{dE}{dx} \right) d \quad (2)$$

b) Um feixe de íons de ${}^4_2\text{He}$ com energia cinética de 3 MeV incide na direção normal à superfície de uma amostra consistente de uma camada delgada que foi depositada sobre um substrato. Um detector mede a energia cinética dos íons dispersados segundo um ângulo $\theta = 165^\circ$. Se a distribuição de energia cinética dos íons dispersados que chegam ao detector é como apresentado na Fig. 1.2. i) quantos elementos compõem a amostra irradiada com esses íons?; ii) quais elementos compõem a camada delgada de espessura d ?; iii) qual é a espessura da camada delgada da amostra?; iv) quais elementos compõem o substrato? [Utilize os dados que precisar da tabela 1 e da Fig. 1.2].



c) Demonstre que o fator cinemático $\frac{E_1}{E_0} = K(m, M_2, \theta)$ está dado pela fórmula (1).



Problema 2: Separação de isótopos do hidrogênio (25 pontos)

Separar as moléculas de hidrogênio H_2 , deutério D_2 e trítio T_2 em uma mistura gasosa é importante para muitas aplicações, mas difícil do ponto de vista tecnológico, porque os três isótopos do hidrogênio e suas combinações moleculares tem dimensões, forma e propriedades químicas praticamente idênticas. Têm sido propostos métodos de separação baseados na diferença das massas que ilustram o seguinte problema:

Considere uma mistura gasosa à temperatura ambiente e muito baixa pressão, com igual concentração das três moléculas. A mistura se encontra em equilíbrio com uma superfície adsorvente que contém N poros, em cada um dos quais pode-se armadilhar no máximo uma molécula, que pode ser de H_2 , D_2 ou T_2 . Suponha que cada poro pode ser aproximado por um poço de potencial parabólico tridimensional isótropo de profundidade U . Uma molécula adsorvida oscila dentro do poço com frequência angular ω_i ($i=H, D, T$).

- Em que proporção se encontram as frequências $\frac{\omega_i}{\omega_H}$?
- Qual é a menor energia possível de cada molécula no poro?
- Em que proporção se encontram as concentrações n_{HA} , n_{DA} e n_{TA} das moléculas adsorvidas nos poros? Avalie numericamente os resultados supondo que $\omega_H = 2 \cdot 10^{14} s^{-1}$
- Se o poro é muito estreito, apenas maior que o diâmetro clássico das moléculas, os efeitos quânticos podem fazer que umas moléculas tenham mais dificuldades para penetrar que outras: Qual tem mais facilidade para penetrar e qual menos? De que ordem deve ser o diâmetro da abertura do poro para que uma molécula de hidrogênio, cujo diâmetro clássico é de aproximadamente 1 \AA se difrate na entrada e não possa penetrar?

Suponha por simplicidade que as rotações e vibrações internas das moléculas não sofrem variação ao serem adsorvidas. Utilize para as constantes de Boltzmann k_B e de Planck \hbar , e para a massa do próton m_p os valores aproximados:

$$k_B \approx 10^{-23} J \cdot K^{-1}; \hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 10^{-34} J \cdot s^{-1}; m_p = \frac{5}{3} \cdot 10^{-27} kg$$

$$\text{Considere que: } \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$



Problema 3: Origem electro-magnética do acoplamento spín-órbita (25 pontos)

Estranhamente, um nêutron (partícula sem carga elétrica líquida) se movimenta em uma órbita circular de raio R ao redor de uma carga elétrica puntiforme Q . Perpendicularmente à órbita, existe um intenso campo magnético B que mantém o momento magnético S associado ao spin do nêutron orientado exatamente na direção normal à órbita. A situação se ilustra na Fig. 3.1.

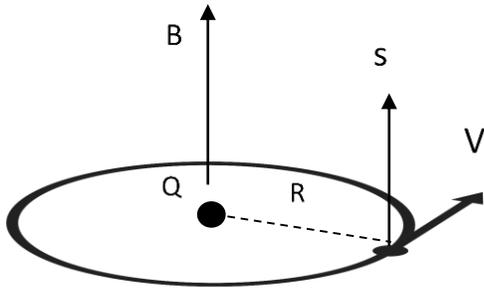


Fig. 3.1

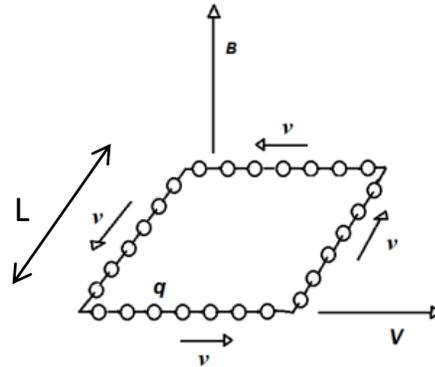


Fig. 3.2

Considere que o momento magnético do nêutron se modela por uma espira quadrada muito pequena de lado L , na que se deslocam cargas de valor q com velocidade relativa ao arame da espira de valor v (ver Fig. 3.2). A separação entre as cargas vale d quando o centro de massa da espira, ou seja, do nêutron, está em repouso, e portanto em cada lado há $N = Ld$ cargas nessa situação. Suponha N ser um valor grande e despreze as possíveis cargas que se encontrem justamente nas esquinas do quadrado. Com vistas a assegurar a carga nula do nêutron, o arame da espira possui ao longo de seu comprimento uma densidade de carga homogênea que no seu total compensa a carga total das bolas e que se move solidariamente com o arame. Assuma também que a velocidade V do nêutron no seu movimento circular é sempre paralela a um dos lados da espira.

a) Determine o valor do vetor momento do dipolo elétrico que surge no nêutron quando está na mencionada órbita, assumindo que as distâncias d entre as partículas de carga q que se encontram nos dois lados ortogonais à direção de movimento do nêutron coincidem com as distâncias entre elas quando a espira está em repouso.

b) Demonstre que essa suposição resulta compatível com a neutralidade de carga do nêutron somente para pequenas velocidades v para as quais o dipolo depende linearmente desta velocidade.

c) Generalize ao caso relativista a fórmula não-relativista para a força centrípeta $f_c = \frac{mv^2}{R}$ do movimento circular de uma partícula de massa m .

d) Calcule então o raio R da órbita do nêutron se é conhecida sua velocidade V e os valores de v ; L ; d ; q ; y Q .

Dados: Fórmula relativista de adição de velocidades $V' = \frac{V \pm v}{1 + \frac{vV}{c^2}}$

Nota: Cabe aqui notar que a distribuição de correntes assumida, sem dúvidas está longe da real, que é descrita pelas correntes associadas ao movimento quântico dos três quarks constituintes do nêutron.

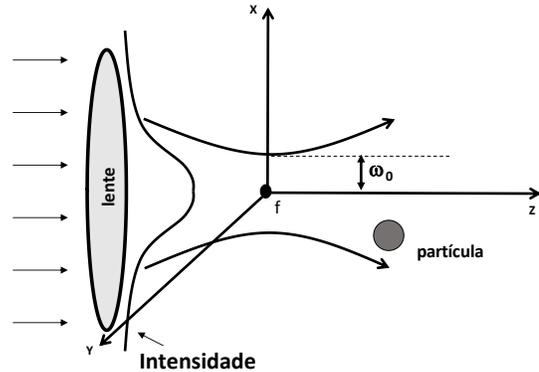


Problema 4: Pinças ópticas. (25 pontos)

O físico norte-americano Arthur Ashkin obteve o prêmio Nobel de Física de 2018 por seus trabalhos pioneiros sobre a interação da radiação laser com partículas dielétricas pequenas, que permitiram desenvolver as pinças ópticas. Esta nova ferramenta serve para armadilhar e transladar partículas nanométricas e micrométricas, tais como vírus, bactérias, células e partes delas, assim como manipular átomos e moléculas. O presente problema é uma versão simplificada dos fundamentos desta técnica.

Um feixe de radiação laser na região do espectro visível incide sobre uma lente convergente que o focaliza em um líquido de índice de refração n como apresentado na figura.

A intensidade do feixe na saída da lente pode ser aproximada por uma distribuição gaussiana:



$$I(r, z) = I(0, z)e^{-\frac{2r^2}{w^2}}$$

Onde r é a distância ao eixo de propagação e $w \equiv w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2}$, sendo λ o comprimento de onda da radiação no líquido e w_0 o raio do feixe no plano focal.

Considere uma esfera dielétrica de raio $a \ll \lambda$ suspensa perto do foco. A esfera é polarizada pelo campo elétrico da onda incidente e se comporta como um pequeno dipolo que dispersa a radiação em todas as direções. Como resultado, a radiação exerce sobre ela dois tipos de forças: uma devida à dispersão da radiação e outra devida à polarização da esfera no campo elétrico não homogêneo da onda incidente.

a) Obtenha $I(0, z)$ em função de I_0 , $w(z)$ e w_0 supondo que o feixe não sofre perdas experimentais durante sua propagação e que I_0 é a intensidade da luz no foco.

b) Se a seção eficaz total de dispersão é σ , demonstre que a força de dispersão \vec{F}_s será:

$$\vec{F}_s = \frac{\sigma n}{c} I \vec{k}$$

Onde \vec{k} é o vetor unitário na direção de propagação e I é a intensidade luminosa no local onde está a partícula.

c) Se a polarizabilidade da esfera é α , demonstre que a média temporal da força de polarização é:

$$\vec{F}_g = \frac{\alpha}{c} \nabla I$$

d) Estabeleça as condições para que exista um ponto de equilíbrio estável sob a ação destas forças e determine as coordenadas deste ponto.