Problema 3: Origen electro-magnético del acoplamiento espín-órbita (25 puntos)

Extrañamente, un neutrón (partícula sin carga eléctrica neta) se mueve en una órbita circular de radio R alrededor de una carga eléctrica puntiforme Q. Perpendicularmente a la órbita, existe un intenso campo magnético B que mantiene el momento magnético S asociado al espín del neutrón orientado exactamente en la dirección normal a la órbita. La situación se ilustra en la Fig. 3.1.

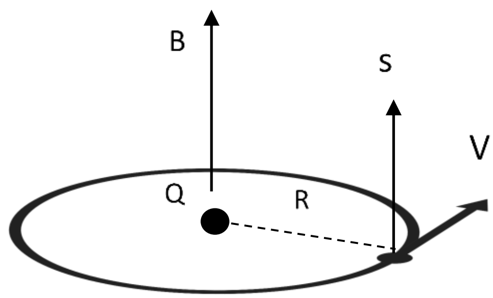

Fig. 3.1

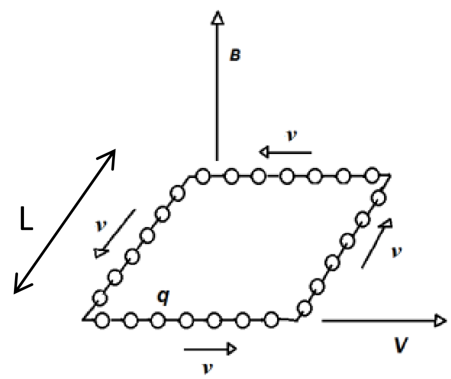

Fig. 3.2

Considere que el momento magnético del neutrón se modela por una espira cuadrada muy pequeña de lado L, en que se mueven cargas de valor q con velocidad relativa al alambre de la espira de valor v (ver Fig. 3. 2). La separación entre las cargas es de valor d, cuando el centro de masa de la espira, o sea del neutrón, está en reposo, y por tanto en cada lado hay $N = Ld$ cargas en esa situación. Suponga N un valor grande y desprecie las posibles cargas que se encuentren justo en las esquinas del cuadrado. Con vistas a asegurar la carga nula del neutrón, el alambre de la espira posee a su largo una densidad de carga homogénea que en total compensa la carga total de las bolas y que se mueve solidariamente con el alambre. Asuma además que la velocidad V del neutrón en su movimiento circular es siempre paralela a uno de los lados de la espira.

a) **(6 ptos)** Determine el valor del vector momento dipolar eléctrico que surge en el neutrón cuando está en la citada órbita asumiendo que las distancias d entre las partículas de carga q que se encuentran en los dos lados ortogonales a la dirección de movimiento del neutrón coinciden con las distancias entre ellas cuando la espira está en reposo.

b) **(6 ptos)** Demuestre que esa suposición resulta compatible con la neutralidad de carga del neutrón solo para pequeñas velocidades v; para las que el dipolo depende linealmente de esta velocidad.

c) **(6 ptos)** Generalice, al caso relativista, la fórmula no relativista para la fuerza centrípeta $f_c = \frac{mv^2}{R}$ del movimiento circular de una partícula de masa m.

d) **(7 ptos)** Calcule entonces el radio R de la órbita del neutrón si se conocen su velocidad V y los valores de v; L; d; q; y Q.

Datos: Fórmula relativista de adición de velocidades $V' = \frac{V \pm v}{1 + \frac{vV}{c^2}}$

Nota: Cabe aquí subrayar que la distribución de corrientes asumida sin dudas está lejos de la real, la cual es descrita por las corrientes asociadas al movimiento cuántico de los tres quarks constituyentes del neutrón.

SOLUCION

I. CÁLCULO DEL MOMENTO DIPOLAR ELÉCTRICO

Cuando la espira se mueve con velocidad V a lo largo de uno de sus lados, los dos lados colineales con la velocidad se contraen al valor $L_c=\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}L$. Además, las partículas del lado en que ellas se mueven a favor de la velocidad del neutrón V, se moveran respecto al sistema del laboratorio con velocidad

$$V^+ = \frac{V+v}{1+\frac{v\,V}{c^2}}, \tag{2}$$

y aquellas que se encuentran en el lado opuesto se moverán en el sistema del laboraorio con velocidad

$$V^- = \frac{V-v}{1-\frac{v\,V}{c^2}}. \tag{3}$$

Por lo tanto, las partículas de cada uno de esos lados, las cuales distan entre sí una distancia d en el sitema de reposo de la espira, se encontrarán, como consecuencia de la contraccion de Lorentz, a las nuevas distancias entre ellas dadas por:

$$d^+ = d\sqrt{1-\frac{(V+v)^2}{c^2(1+\frac{V\ v}{c^2})^2}}, \tag{4}$$

$$d^- = d\sqrt{1-\frac{(V-v)^2}{c^2(1-\frac{V\ v}{c^2})^2}}. \tag{5}$$

Como los dos lados paralelos a la velocidad sufren la misma contracción de Lorentz $L_c=\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}L$, la cantidad de partículas que están contenidas en cada uno de esos lados viene dada por la razón entre la longitud de los brazos contraidas y la distancia entre las cargas asociada a cada brazo. Es decir

$$N^+ = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}L}{d^+} = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}Nd}{d^+}, \tag{6}$$

$$N^- = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}L}{d^-} = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}Nd}{d^-}. \tag{7}$$

Por tanto, para la carga en cada uno de los lados se tiene

$$Q^+ = \frac{q\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}L}{d^+} = \frac{q\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}Nd}{d^+}, \tag{8}$$

$$Q^- = \frac{q\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}L}{d^-} = \frac{q\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}Nd}{d^-}. \tag{9}$$

Como se asume, la carga de los lados que son ortogonales al movimiento permanece igual a Nq. Como el neutrón tiene carga nula, considere que sobre la espira existe una distribución de carga continua a lo largo de su perímetro que exactamente compensa toda la carga de las esferitas. Esa carga, como se mueve solidariamente con la espira sufre una contracción de Lorentz idéntica a la que experimenta la espira: las dos distribuciones en los lados paralelos al movimiento se contraen de acuerdo a la velocidad de la espira V y los dos lados ortogonales no se contraen en absoluto. Por tanto la carga total asociada a ese carga compensatoria es igual a la original en cada lado (el calificativo de original indica el caso de cuando la espira está en reposo).

Se concluye entonces que en cada uno de los lados colineales al movimiento se generan cargas netas dadas por

$$\delta Q^+ = Q^+ - qN = qN(\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}d}{d^+}-1), \tag{10}$$

$$\delta Q^- = Q^- - qN = qN(\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}d}{d^-}-1). \tag{11}$$

Definiendo entonces el momento dipolar con respecto la centro de la espira en movimiento se tiene

$$\overrightarrow{p} = \int dv\rho(\overrightarrow{r})\overrightarrow{r} \tag{12}$$

$$= \frac{\overrightarrow{V}}{|\overrightarrow{V}|} \times \frac{\overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{B}|} qN \ \frac{L}{2}(\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}d}{d^+} - \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}d}{d^-}), \tag{13}$$

ya que el dipolo esta dirigido en la dirección que es normal tanto a la velocidad del neutrón como al campo magnético aplicado. La componente de los vectores de posición de las cargas asociadas a los lados paralelos al movimiento en la dirección definida por el producto vectorial es siempre de modulo igual a $L/2$. Luego para el modulo del momento dipolar se tiene

$$|\overrightarrow{p}| = \frac{q\ N\ L}{2}(\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{(V+v)^2}{c^2(1+\frac{V\ v}{c^2})^2}}} - \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{(V-v)^2}{c^2(1-\frac{V\ v}{c^2})^2}}}). \tag{14}$$

II. ANULACIÓN DE LA CARGA EN LA APROXIMACIÓN LINEAL EN v

Las expresiones para las cargas en los dos lados que son paralelos a la velocidad pueden desarrollarse hasta el orden cuadrático en v según

$$\delta Q^+ = qN(\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{(V+v)^2}{c^2(1+\frac{V\ v}{c^2})^2}}} - 1) = qN\frac{v\ V}{c^2} + \frac{qN}{2}\frac{v^2}{c^2} + ... \tag{15}$$

$$\delta Q^- = qN(\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}d}{\sqrt{1-\frac{(V-v)^2}{c^2(1-\frac{V\ v}{c^2})^2}}} - 1) = -qN\frac{v\ V}{c^2} + \frac{qN}{2}\frac{v^2}{c^2} + ... \tag{16}$$

donde se observa que en la aproximación lineal en v, la carga neta se anula. De esa forma la carga total difiere de cero si no se toma la aproximación lineal en v , y se tiene

$$\begin{aligned} \delta Q^+ + \delta Q^- &= +qN\frac{v^2}{c^2} + ... \\ &= 0 + O^{(2)}(v). \end{aligned} \tag{17}$$

III. FORMA RELATIVISTA DE LA ACCELERATION CENTRIPETA

La ecuación de Newton relativista se puede escribir en la forma

$$\frac{d}{dt}(\frac{m_n}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\overrightarrow{V}) = \frac{m_n}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{F}_{radial}, \tag{18}$$

donde se consideró que en el movimiento circular el valor del cuadrado de la velocidad $|\overrightarrow{V}|^2$ no depende del tiempo. Como todos los vectores se puede decir que "rotan" con la misma velocidad angular w del movimiento circular, el módulo de la variación en un tiempo dt de cualquier vector es igual al módulo de ese vector multiplicado por la velocidad angular. Por otra parte de la Figura 1 se nota, que en el caso de la velocidad $\overrightarrow{V}$, su derivada temporal está dirigida hacia el centro de fuerzas (la carga Q), es decir, en sentido negativo del sistema de referencia de las fuerzas que lo tomamos positivo en la dirección en que el radio crece. Luego

$$\begin{aligned} \frac{m_n}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\overrightarrow{V} &= -\frac{m_n}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} V\ w\ \overrightarrow{n}_R \\ &= -\frac{m_n}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{V^2}{R}\ \overrightarrow{n}_R \\ &= F_{radial}\ \overrightarrow{n}_R. \end{aligned} \tag{19}$$

La fórmula anterior permite escribir para la generalización relativista de la fuerza centrípeta

$$f_c = \frac{m_n}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{V^2}{R}. \tag{20}$$

IV. CÁLCULO DEL RADIO R DE LA ÓRBITA

Para el cálculo del radio, consideremos que dado que la carga neta del neutrón es nula, el efecto que puede crear la fuerza centrípeta necesaria para mantener el movimiento circular es la existencia de un gradiente del campo eléctrico, que hace que la fuerza neta sobre las dos cargas opuestas no se anule, ya que la carga positiva esta separada espacialmente de la negativa.

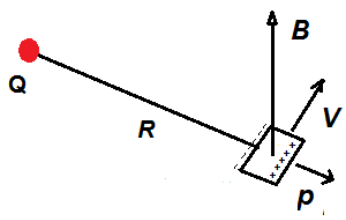

FIG. 1:

De esa manera la fuerza perpendicular al movimiento del neutrón con velocidad V vendrá dada por la diferencia entre los módulos de la fuerza de Coulomb sobre la carga neta de uno de los dos lados de la espira colineales con V, menos el modulo de la fuerza ejercida sobre el lado opuesto. Ver la Figura 1. Como la espira es sumamente pequeña (del orden del tamaño del neutrón) la variación vendrá dada por la derivada de la fuerza de Coulumb con respecto al radio R, multiplicada por el momentum dipolar

$$\begin{aligned} F_{radial} &= E(R+\frac{L}{2})|\delta Q^+| - E(R-\frac{L}{2})|\delta Q^-| \\ &= \frac{\partial}{\partial R}E(R)\frac{L}{2}(|\delta Q^+| - |\delta Q^-|) \\ &= \frac{\partial}{\partial R}E(R)\ |\overrightarrow{p}| \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial R}(\frac{1}{R^2})|\overrightarrow{p}| \\ &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{R^3}|\overrightarrow{p}|. \end{aligned} \tag{21}$$

Consideremos ahora la referencia ya definida para el signo de las componentes de las fuerzas, como positivo en la dirección que la fuerza se aleja de la carga Q, sustituyendo la expresión para F_{radial} evaluada en la respuesta a la pregunta anterior y despejando R se tiene para el valor de ese radio

$$R = \sqrt{\frac{Q \ |\overrightarrow{p}|\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{2\pi\varepsilon_0 m_n V^2}}, \tag{22}$$

$$|\overrightarrow{p}| = \frac{q \ N \ L}{2}\left(\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{(V+v)^2}{c^2(1+\frac{V\ v}{c^2})^2}}} - \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{(V-v)^2}{c^2(1-\frac{V\ v}{c^2})^2}}}\right). \tag{23}$$