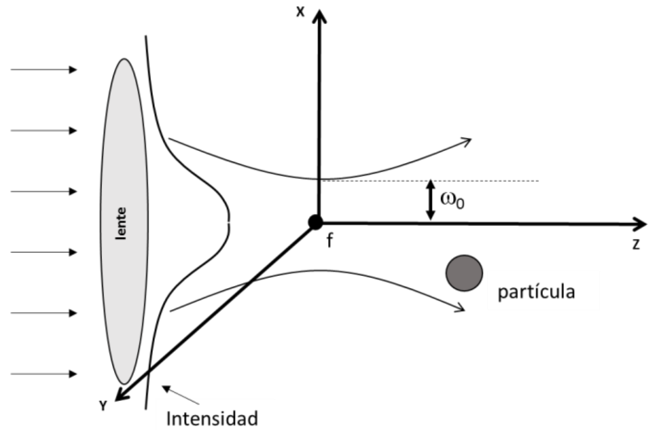
Problema 4: Pinzas ópticas. (25 puntos)

El físico norteamericano Arthur Ashkin fue galardonado con el premio Nobel de Física de 2018 por sus trabajos pioneros sobre la interacción de la radiación láser con partículas dieléctricas pequeñas, que permitieron desarrollar las pinzas ópticas. Esta nueva herramienta sirve para atrapar y trasladar partículas nanométricas y micrométricas, tales como virus, bacterias, células y partes de ellas, así como manipular átomos y moléculas. El presente problema es una versión simplificada de los fundamentos de esta técnica.

Un haz de radiación láser en la región visible del espectro incide sobre una lente convergente que lo enfoca hacia un líquido de índice de refracción n según se aprecia en la figura.



La intensidad del haz a la salida de la lente puede aproximarse por una distribución gaussiana:

$$I(r,z) = I(0,z)e^{-\frac{2r^2}{w^2}}$$

Donde r es la distancia al eje de propagación y $w \equiv w(z) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{\lambda z}{\pi {w_0}^2}\right)^2}$, siendo λ la longitud de onda de la radiación en el líquido y w_0 el radio del haz en el plano focal.

Considere una esfera dieléctrica de radio a<<λ suspendida cerca del foco. La esfera es polarizada por el campo eléctrico de la onda incidente y se comporta como un pequeño dipolo que dispersa la radiación en todas direcciones. Como resultado, la radiación ejerce sobre ella dos tipos de fuerzas. Una debida a la dispersión de la radiación y otra debida a la polarización de la esfera en el campo eléctrico no homogéneo de la onda incidente.

a) **(5 puntos)** Obtenga $I(0,z)$ en términos de I_0 ,$w(z)$ y w_0 suponiendo que el haz no experimenta pérdidas durante su propagación y que I_0 es la intensidad de la luz en el foco.

b) **(5 puntos)** Si la sección eficaz total de dispersión es σ, demuestre que la fuerza de dispersión $\vec{F_s}$ será:

$$\vec{F_s} = \frac{\sigma n}{c} I\vec{k}$$

Donde $\vec{k}$ es el vector unitario en la dirección de propagación e I es la intensidad luminosa en el lugar donde está la partícula.

c) **(5 puntos)** Si la polarizabilidad de la esfera es α, demuestre que el promedio temporal de la fuerza de polarización es:

$$\vec{F_g} = \frac{\alpha}{c}\nabla I$$

d) **(10 puntos. Se darán 5 ptos por encontrar las soluciones y 5 ptos por demostrar el equilibrio estable)** Establezca las condiciones para que exista un punto de equilibrio estable bajo la acción de estas fuerzas y determine las coordenadas de este punto. **Por calcular el valor 5 ptos, por demostar que es un punto de equilibrio 5 ptos)**

Respuestas

a) Teniendo en cuenta que no hay pérdida de energía en el haz, considerando $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$,se puede escribir

$$\int_{r=0}^{r=\infty} I(r,z)d(\pi r^2) = \pi \int_{r=0}^{r=\infty} I(0,z)e^{-\frac{2r^2}{w^2}}\,d(r^2) = \pi I(0,z)\int_{r=0}^{r=\infty} e^{-\frac{2r^2}{w^2}}\,d(r^2)$$

$$= \pi I(0,z)\left(-\frac{w^2}{2}\right)\left[e^{-\frac{2r^2}{w^2}}\right]_{r=0}^{r=\infty} = \pi I(0,z)\left(-\frac{w^2}{2}\right)[e^{-\infty} - e^{-0}]$$

$$= \pi I(0,z)\left(\frac{w^2}{2}\right) = \pi I(0,0)\left(\frac{{w_0}^2}{2}\right) = \pi I_0\left(\frac{{w_0}^2}{2}\right)$$

Y de $\pi I(0,z)\left(\frac{w^2}{2}\right) = \pi I_0\left(\frac{{w_0}^2}{2}\right)$, resulta

$$I(0,z) = I_0\left(\frac{{w_0}^2}{w^2}\right) = I_0\left(\frac{{w_0}^2}{w(z)^2}\right) \quad (1)$$ **LQQD**.

b) Esta pregunta puede ser respondida considerando el haz de luz como una onda electromagnética o como un flujo de fotones.

<u>Considerando el haz de luz como una onda electromagnética</u>:

Sean:

σ: Área efectiva de la partícula que dispersa la luz

n: Índice de refracción de la luz en el medio donde se propaga el haz luminoso

$\vec{F}_S = \frac{d\vec{p}}{dt}$: Fuerza que ejerce la luz sobre la partícula al transmitirle una cantidad de movimiento lineal por unidad de tiempo $\frac{d\vec{p}}{dt}$

$\langle\vec{S}(\vec{r},t)\rangle_T$: Valor medio temporal del vector de Poynting en el lugar donde está la partícula (cantidad de energía que atraviesa el área σ por unidad de tiempo en la dirección de propagación de la onda electromagnética en $\vec{r} \equiv (x,y,z)$)

$I(\vec{r})$: Intensidad de la luz interceptada por la partícula en el área efectiva σ (cantidad de energía que atraviesa el área σ por unidad de tiempo en la dirección de propagación de la onda electromagnética en $\vec{r} \equiv (x,y,z)$)

O sea, $\langle\vec{S}(\vec{r},t)\rangle_T = I(\vec{r})\vec{k}$.

Por otra parte, la presión de la luz, P_{rad} , sobre una partícula que intercepta la radiación en un área A normal a la dirección de propagación de la onda es $P_{rad} = F_{rad}A = \frac{I}{c}$ en el vacío y $P_{rad} = \frac{I}{v} = \frac{I}{c/n} = \frac{n}{c}I$ en un medio donde la velocidad de la luz es $v = c/n$.

Teniendo en cuenta que en este problema $F_{rad} = F_s$, se puede escribir $F_s = P_{rad} \cdot \sigma = \frac{n}{c}I\sigma$. que expresado con notación vectorial es

$$\vec{F}_s = \frac{n}{c}I\sigma\vec{k} \quad (2) \quad \textbf{LQQD}$$

<u>Considerando el haz de luz como un flujo de fotones</u>:

En el vacío el momento lineal de un fotón es $p = \frac{E}{c}$ y en un medio de índice de refracción n es $p = \frac{E}{v} = \frac{E}{c/n} = \frac{n}{c}E$, donde E es la energía del fotón, $E = h\omega$. En la dirección de propagación de la luz,

$\vec{p} = \frac{n}{c}E\vec{k}$.

Sea N_s es la cantidad de fotones por unidad de área y de tiempo que atraviesa una superficie normal a la dirección de propagación de la luz de área A.

Entonces, la cantidad de movimiento lineal por unidad de tiempo que se transmite a través de esa superficie es

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = N_s\sigma\frac{n}{c}E\vec{k}$$

Pero N_sE es la cantidad de energía que atraviesa la unidad de área en la unidad de tiempo, o sea la intensidad I de la luz: $I = N_sE$, y $\vec{F}_s = \frac{d\vec{P}}{dt}$, porque la superficie considerada en este problema es la que tiene área de sección transversal igual a la sección eficaz de dispersión σ y el momento total de radiación dispersada en todas direcciones es nulo.

Luego,

$$\vec{F}_s = \frac{\sigma n}{c}I\vec{k} \qquad (2) \quad \textbf{LQQD}$$

Está claro que la (2) en forma explícita es la (3):

$$\vec{F}_s(z) = \frac{\sigma n}{c}I_0\left(\frac{{w_0}^2}{w(z)^2}\right)\vec{k} \qquad (3)$$

c) Si la polarizabilidad de la esfera es α, demuestre que el promedio temporal de la fuerza de polarización es:

$$\boldsymbol{\vec{F}_g = \frac{\alpha}{c}\nabla I}$$

Si el campo eléctrico de la onda incidente es $\vec{E}(\vec{r},t)$ el dipolo inducido en la esfera será $\vec{d} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}$ y la energía del dipolo en el campo será $-\vec{d}\cdot\vec{E} = -\alpha\varepsilon_0 E^2$ cuyo promedio temporal es:

$$U(\vec{r}) = -\alpha\varepsilon_0\frac{E^2}{2} = -\alpha u = -\frac{\alpha}{c}I$$

Donde u es el promedio temporal de la densidad de energía del campo eléctrico e $I = cu$ la intensidad de la radiación. La fuerza de polarización sobre el dipolo resulta:

$$\vec{F}_g = \frac{\alpha}{c}\nabla I \quad \textbf{LQQD}$$

<u>Nota 1</u>: <u>Demostración</u> de $U(\vec{r}) = -\alpha\varepsilon_0\frac{E^2}{2}$:

Como se trata de una onda que se propaga en el sentido positivo del eje Z, se puede escribir $\vec{E}(\vec{r},t) = E(\vec{r})\cos(kz-\omega t+\varphi)$ y

$U(\vec{r}) \ = \ \langle U(\vec{r},t)\rangle_T = \langle -\alpha\varepsilon_0 E^2\rangle_T = -\alpha\varepsilon_0\langle {E_0}^2(\vec{r})\cos^2(kz-\omega t+\varphi)\rangle_T =$
$\frac{-\alpha\varepsilon_0}{T}\int_0^T {E_0}^2(\vec{r})\cos^2(kz-\omega t+\varphi)\ dt$

Con el cambio de variable $u(t) = kz-\omega t+\varphi$, $d[u(t)] = -\omega dt$ y sabiendo que

$\int\cos^2 ax\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x+\cos x\sin x}{a}\right] + C$ y $\int_a^{a+2\pi}\cos^2 x\,dx = \int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx$ se obtiene:

$$U(\vec{r}) = \ \langle U(\vec{r},t)\rangle_T \ = \ \langle -\alpha\varepsilon_0 E^2\rangle_T \ = \ \frac{-\alpha\varepsilon_0}{T}\int_0^T {E_0}^2(\vec{r})\cos^2(kz-\omega t+\varphi)\ dt$$

$= \ -\ \frac{\alpha\varepsilon_0 {E_0}^2(\vec{r})}{\omega T}\int_{kz+\varphi}^{kz-\omega T+\varphi}\cos^2 u\ du = \ -\ \frac{\alpha\varepsilon_0 {E_0}^2(\vec{r})}{\omega T}\int_0^{-\omega T}\cos^2 u\ du = -\ \frac{\alpha\varepsilon_0 {E_0}^2(\vec{r})}{\omega T}\frac{1}{2}\ [u +$
$\cos u\sin u]_0^{-\omega T} \ = -\ \frac{\alpha\varepsilon_0 {E_0}^2(\vec{r})}{2\omega T}\ [\{(-\omega T)+\cos(-\omega T)\sin(-\omega T)\} - \{(0)+\cos(0)\sin(0)\}] \ =$
$-\ \frac{\alpha\varepsilon_0 {E_0}^2(\vec{r})}{2\omega T}\ [-\omega T + \ \cos(0)\sin(0) - \ 0\,] = -\ \frac{\alpha\varepsilon_0 {E_0}^2(\vec{r})}{2\omega T}\ [-\omega T + \ 0\,] \ = \ -\ \frac{\alpha\varepsilon_0 {E_0}^2(\vec{r})}{2\omega T}\ [-\omega T] \ =$
$-\ \frac{\alpha\varepsilon_0 {E_0}^2(\vec{r})}{2}$.

d) Demuestre que bajo la acción de estas dos fuerzas la esfera tiene un punto de equilibrio estable y calcule las coordenadas de ese punto.

En la posición de equilibrio de la partícula, la suma de las fuerzas que actúan sobre ella es nula. Si (x_e, y_e, z_e) son las coordenadas de la partícula en una posición de equilibrio y $\vec{F}_R$, es la fuerza resultante que actúa sobre ella, $\vec{F}_R(x_e, y_e, z_e) = 0$. O sea,

$$\vec{F}_R(x_e, y_e, z_e) = \vec{F}_g + \vec{F}_s = \frac{\sigma n}{c} I\vec{k} + \frac{\alpha}{c}\nabla I = 0 \;. (4)$$

Si el equlibrio es estable, además de (4) en la vecindad de (x_e, y_e, z_e) la fuerza resultante debe apuntar hacia la posición de equilibrio. O sea, en $(x_e + \varepsilon, y_e + \varepsilon, z_e + \varepsilon)$ y en $(x_e - \varepsilon, y_e - \varepsilon, z_e - \varepsilon)$ la fuerza resultante tiene que apuntar hacia (x_e, y_e, z_e).

A su vez, en el punto de equilibrio estable la energía potencial de la partícula tiene un valor mínimo. Por lo cual, si $\vec{F}_R = -\nabla V$, entonces el potencial debe satisfacer la condición de mínimo en (x_e, y_e, z_e): $\nabla V(x_e, y_e, z_e) = 0$ y $\nabla^2 V(x_e, y_e, z_e) > 0$.

Ambas condiciones son equivalentes. Así es que las dos vías de responder esta pregunta son válidas.

La fuerza $\vec{F}_s$ está dada por (3). Hallemos una expresión para la fuerza $\vec{F}_g$, que es directamente proporcional a ∇I.

De acuerdo al enunciado, la intensidad luminosa $I(x, y, z) = I(r, z) = I(0, z)e^{-\frac{2r^2}{w^2}}$ tiene simetría axial respecto al eje Z, dada por el frente de onda plano con distribución gaussiana de la intensidad

$I(r, z) = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 exp\left(-\, 2r^2/_{w(z)^2}\right)$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $w(z) = w_0\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi {w_0}^2}\right)^2}$.(5)

Eso significa que se puede simplificar el cálculo de ∇I asumiendo que $\nabla \mathrm{I} = \frac{\partial I}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial I}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial I}{\partial z}\vec{k} = \frac{\partial I}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{\partial I}{\partial z}\vec{k}$, donde $\frac{\partial I}{\partial r}\vec{e}_r = \frac{\partial I}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial I}{\partial y}\vec{\jmath}$, $\vec{e}_r = \vec{r}(x, y)/_{r(x, y)}$, $r(x, y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Entonces

$\vec{F}_g = \vec{F}_g(x, y) + \vec{F}_g(z)$ (6),

Donde $\vec{F}_g(x, y) = \frac{\alpha}{c}\frac{\partial I}{\partial r}\vec{e}_r$ (7)

y $\vec{F}_g(z) = \frac{\alpha}{c}\frac{\partial I}{\partial z}\vec{k}$ (8).

De (6), el gradiente de la intensidad luminosa en el plano XY, normal a Z, es

$$\frac{\partial I}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left\{I_0\left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 exp\left(-{2r^2}/{w(z)^2}\right)\right\}=I_0\left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2\left(-{4r}/{w(z)^2}\right)exp\left(-{2r^2}/{w(z)^2}\right)$$

$\frac{\partial I}{\partial r}=-4I_0\frac{{w_0}^2}{w(z)^4}(r)exp\left(-{2r^2}/{w(z)^2}\right)$ (9)

La (9) significa que la fuerza $\vec{F}_g(x,y)$ que actúa radialmente sobre la partícula es

$\vec{F}_g(x,y)=\frac{\alpha}{c}\frac{\partial I}{\partial r}\vec{e}_r=-\frac{4\alpha I_0{w_0}^2}{c}\left[\frac{r}{w(z)^4}\right]exp\left(-{2r^2}/{w(z)^2}\right)\vec{e}_r$ (10)

La (10) se anula en $r=0$, o sea en $(x,y)=(0{,}0)$ y **apunta hacia el eje Z en cualquier punto de coordenadas $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\mathbf{0},\mathbf{0},\boldsymbol{z})$**. O sea, que **el punto de equilibrio estable tridimensional tiene coordenadas $\boldsymbol{x_e}=\mathbf{0},\boldsymbol{y_e}=\mathbf{0}\ \forall\ \boldsymbol{z}$.**

Para determinar el valor de z_e es necesario primero determinar $\frac{\partial I}{\partial z}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial z}&=\frac{\partial}{\partial z}\left\{I_0\left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 exp\left(-{2r^2}/{w(z)^2}\right)\right\}\\&=I_0{w_0}^2\left\{\frac{\partial}{\partial z}[w(z)^{-2}]exp\left(-{2r^2}/{w(z)^2}\right)+w(z)^{-2}\frac{\partial}{\partial z}\left[exp\left(-{2r^2}/{w(z)^2}\right)\right]\right\}\\&=I_0{w_0}^2exp\left(-{2r^2}/{w(z)^2}\right)\left\{[-2w(z)^{-3}]\frac{dw(z)}{dz}\right.\\&\left.+[-2r^2w(z)^{-2}]\left[-2w(z)^{-3}\frac{dw(z)}{dz}\right]\right\}\end{aligned}$$

$\frac{\partial I}{\partial z}=-2I_0{w_0}^2exp\left(-{2r^2}/{w(z)^2}\right)[w(z)^{-3}-2r^2w(z)^{-5}]\frac{dw(z)}{dz}$ (11)

Pero en cualquier punto de coordenadas $(0{,}0,z)$, $r=0$ y la (11) se simplifica y toma la forma (12):

$\left.\frac{\partial I}{\partial z}\right|_{(0,0,z)}=\frac{dI(0,0,z)}{dz}=-2I_0{w_0}^2[w(z)^{-3}]\frac{dw(z)}{dz}$ (12)

Luego la fuerza debida al gradiente de la intensidad luminosa según el eje Z se reduce a

$\vec{F}_g(0{,}0,z)=-\frac{2\alpha I_0{w_0}^2}{c}w(z)^{-3}\frac{dw(z)}{dz}\vec{k}$ (13)

Entonces, puede haber equilibrio tridimensional si y sólo si se anula la resultante de las fuerzas en la dirección del eje Z . O sea, si $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{z})$ y $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{z})$ satisfacen la condición (14):

$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{x_e},\boldsymbol{y_e},\boldsymbol{z_e})=\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{z_e})+\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{z_e})=\mathbf{0}.$ (14)

Sustituyendo ahora $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{z})$ de (2) y $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{z})$ de (13) en la (14) se obtiene la siguiente ecuación:

$\vec{F}_R(x_e, y_e, z_e) = -\frac{2\alpha I_0 {w_0}^2}{c} w(z)^{-3} \frac{dw(z)}{dz} \vec{k} + \frac{I(0,0,z)\sigma}{c} n\vec{k} = 0.$ (15)

Con $I(0,0,z) = I_0 \left(\frac{{w_0}^2}{w(z)^2}\right)$, de (1) o de (3),

$\vec{F}_R(x_e, y_e, z_e) = -\frac{2\alpha I_0 {w_0}^2}{c} w(z)^{-3} \frac{dw(z)}{dz} \vec{k} + I_0 \left(\frac{{w_0}^2}{w(z)^2}\right) \frac{\sigma}{c} n\vec{k} = 0\ .$ (16)

Equivalente a la siguiente igualdad:

$$\frac{2\alpha I_0 {w_0}^2}{c} w(z)^{-3} \frac{dw(z)}{dz} = \frac{I_0 \left(\frac{{w_0}^2}{w(z)^2}\right) \sigma n}{c}$$

$2\alpha\, w(z)^{-1} \frac{dw(z)}{dz} = \sigma n$ (17)

Y derivando $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi {w_0}^2}\right)^2}$, se obtiene

$$\frac{dw(z)}{dz} = w_0 \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi {w_0}^2}\right)^2\right]^{-1/2} \left[0 + 2\left(\frac{\lambda z}{\pi {w_0}^2}\right)\left(\frac{\lambda}{\pi {w_0}^2}\right)\right] =$$

$$= w_0 \left\{\left(\frac{\lambda}{\pi {w_0}^2}\right)^2 z \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi {w_0}^2}\right)^2\right]^{-1/2}\right\} = \left(\frac{\lambda}{\pi w_0}\right)^2 z \frac{1}{w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi {w_0}^2}\right)^2}} = \frac{1}{w(z)} \left(\frac{\lambda}{\pi w_0}\right)^2 z$$

$\frac{dw(z)}{dz} = \frac{1}{w(z)} \left(\frac{\lambda}{\pi w_0}\right)^2 z \quad (18)$

Y sustituyendo (18) en (17):

$$\frac{2\alpha}{\sigma n} \left(\frac{\lambda}{\pi w_0}\right)^2 z = w^2 = w_0^2 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0}\right)^2$$

$z^2 - \frac{2\alpha}{\sigma n} z + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda}\right)^2 = 0$ (19)

Cuya solución es:

$z_\pm = \frac{\alpha}{\sigma n} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\sigma n}\right)^2 - \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda}\right)^2}$ (20)

Para que existan puntos de equilibrio debe ser: $\frac{\alpha}{\sigma n} > \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$

Como $\lim_{\sigma\to 0} z_- = 0$, y $\lim_{\sigma\to 0} z_+ = \infty$, cuando $\sigma = 0$, la posición de equilibrio es $z = 0$, por lo que hay que escoger el signo menos. Luego, si y sólo si $\sigma = 0$ la partícula está en equlibrio en el puunto de coordenadas $(x_{eq}, y_{eq}, z_{eq}) \equiv (0,0,0)$, o sea , el foco de la lente.

Se puede probar que en ese punto hay equilibrio estable, de varias formas, a continuación desarrollamos tres de ellas.

Variante 1. Para demostrar que la solución mas cercana a cero es la que da el equilibrio estable podemos considerar la expresión de la fuerza y buscar el signo que tiene cuando z tiende a cero. Si el signo es positivo para la primera solución (las más cercana a z=0) el valor de la fuerza pasa de positivo a negativo en este punto, lo que produce equilibrio estable pues la fuerza, alrededor del punto de equilibrio, siempre estará dirigida hacia él. Para el segundo punto de equilibrio, la fuerza entonces tiene que venir de valores negativos a positivos, lo cual produce equilibrio inestable pues la fuerza alrededor del punto de equilibrio, está siempre dirigida hacia afuera de él. Si encontramos que la fuerza para z tendiendo a cero es negativa, entonces es todo lo contrario.

La fuerza es:

$$-\frac{2\alpha I_0 {w_0}^2}{c} w(z)^{-4} \left(\frac{\lambda}{\pi w_0}\right)^2 z + I_0 \left(\frac{{w_0}^2}{w(z)^2}\right) \frac{\sigma n}{c}$$

$$\frac{I_0 {w_0}^2}{c w(z)^2} \left[-2\alpha w(z)^{-2} \left(\frac{\lambda}{\pi w_0}\right)^2 z + \sigma n\right]$$

Como lo que determina el signo de la fuerza es el término entre corchetes, trabajaremos sólo con él:

$$-2\alpha w(z)^{-2} \left(\frac{\lambda}{\pi w_0}\right)^2 z + \sigma n$$

Que se puede transformar en:

$$-2\alpha \frac{z}{\left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi {w_0}^2}\right)^2\right]} \left(\frac{\lambda}{\pi {w_0}^2}\right)^2 z + \sigma n$$

Que tiene el mismo signo que:

$$-\frac{2\alpha}{\sigma n} z + \left(\frac{\pi {w_0}^2}{\lambda}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi {w_0}^2}\right)^2\right]$$

Se ve que cuando z tiende a cero, el término negativo tiende a cero, mientras que el término positivo se mantiene siendo finito, lo cual quiere decir que la fuerza es positiva para z tendiendo a cero y por tanto la primera solución es la que da el equilibrio estable.

Variante 2. Se puede hacer una expansión de la fuerza alrededor del punto de equilibrio:

$$F \approx F(z_-) + \left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_-} (z - z_-) + \cdots$$

Para que la fuerza sea restitutiva basta demostrar que la derivada es negativa.

Derivando la expresión de la fuerza se obtiene aparte del factor multiplicativo:

$$\frac{2\alpha}{\sigma n}\left(\frac{\lambda}{\pi w_0}\right)^2 z \; \frac{2\alpha}{w^4}\left\{-1 + \left(\frac{\lambda}{\pi w_0}\right)^2 \frac{2z}{w^2} - \frac{\sigma n z}{\alpha}\right\}$$

Y el signo de la derivada queda definido por el término entre llaves

Si substituimos la solución $\frac{2\alpha}{\sigma n}\left(\frac{\lambda}{\pi w_0}\right)^2 z = w^2$ el factor entre llaves queda:

$$\left\{-1 + \frac{\sigma n z}{\alpha}\right\}$$

Y substituyendo la solución para z, $z_\pm = \frac{\alpha}{\sigma n} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\sigma n}\right)^2 - \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda}\right)^2}$

$$-1 + \frac{\sigma n z}{\alpha} = \pm\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\sigma n}\right)^2 - \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda}\right)^2}$$

Que es negativa, solo cuando tomamos el signo negativo y positiva cuando tomamos el signo negativo.

O sea, tal como se encontró en la variante anterior, la solución más cercana a z=0 es la que produce el equilibrio estable y la mas alejada la que produce el equilibrio inestable.

Variante 3. Otra forma de probar que hay equilibrio estable en z_- es analizar el comportamiento de la energía potencial $V(z)$ en el entorno de z_-, lo cual se puede hacer mediante la representación gráfica de

$$V(z) = -\frac{\boldsymbol{I_0 w_0}^2}{\boldsymbol{c}}\left(\frac{\alpha}{w(z)^2} + \frac{\sigma n}{\lambda}\tan^{-1}\frac{\lambda}{\pi w_0{}^2} z\right)$$

La demostración de esta última ecuación puede hacerse como sigue:

En la posición de equilibrio estable de la partícula, la energía potencial tiene un mínimo y donde hay equilibrio inestable la energía tiene un máximo. Veamos entonces la energía potencial.

Como la fuerza resultante es $\vec{F}_R(0,0,z) = \vec{F}_g(0,0,z) + \vec{F}_s(0,0,z)$, la energía potencial correspondiente a esa fuerza es:

$V(0,0,z) = -\int_0^z F_{res}(0,0,z)dz = -\int_0^z \left[-\frac{2\alpha I_0 {w_0}^2}{c} w(z)^{-3} \frac{dw(z)}{dz}\right] dz - \int_0^z \frac{\sigma n}{c} I(0,0,z)dz,$

Donde, $\frac{dw(z)}{dz} = \frac{1}{w}\left(\frac{\lambda}{\pi w_0}\right)^2 z.$

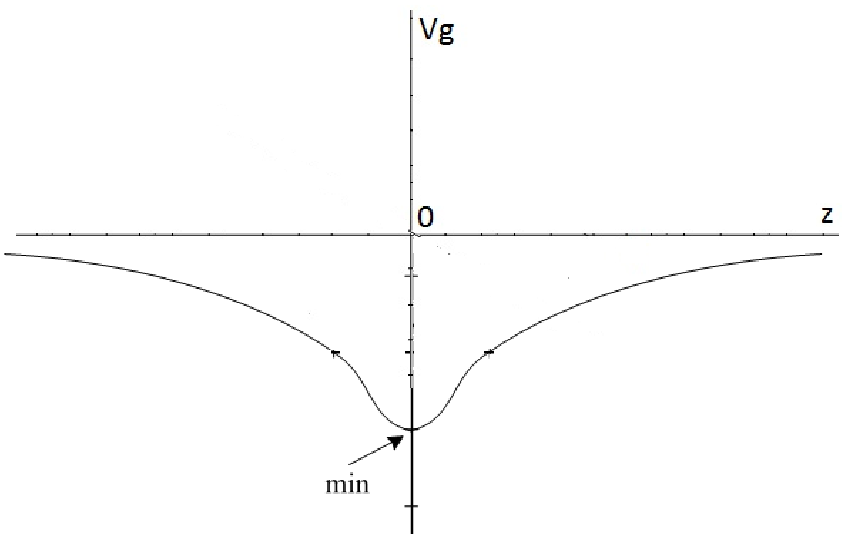
Puede escribirse $V(0,0,z) = \ V_g(0,0,z) + V_s(0,0,z)$

Donde, de $\vec{F_g} = \frac{\alpha}{c}\nabla I$ y con $V_g(0,0,z) = U(0,0,z)$, donde $U(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{c}I$, resulta:

$F_g(0,0,z) = -\frac{dV_g(0,0,z)}{dz} = \frac{\alpha}{c}\frac{dI(0,0,z)}{dz}$

O sea, $\boldsymbol{V_g(0,0,z) = -\frac{\alpha}{c} I(0,0,z) = -\frac{\alpha}{c} I_0 {w_0}^2 \left(\frac{1}{w(z)^2}\right)}$ (25)

Esa energía potencial puede representarse gráficamente como en la figura siguiente.



Para obtener la expresión de $V_s(0,0,z)$, se puede proceder a partir de las igualdades $V_s(0,0,z) = -\int_0^z F_s(0,0,z)dz$ y $\vec{F_s} = \frac{\sigma n}{c} I\vec{k}$, teniendo en cuenta que aquí $F_s = F_s(0,0,z)$ y $I = I(0,0,z) = I_0 \frac{{w_0}^2}{w(z)^2}$.

Entonces:

$V_s(0,0,z) = -\int_0^z F_s(0,0,z)dz = \ -\frac{\sigma n I_0 {w_0}^2}{c}\int_0^z \left(\frac{1}{w(z)^2}\right) dz$

Como $w(z)^2 = {w_0}^2\left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi {w_0}^2}\right)^2\right]$

$$V_s(0,0,z) = -\frac{\sigma n I_0 {w_0}^2}{c}\int_0^z \left(\frac{1}{{w_0}^2\left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi {w_0}^2}\right)^2\right]}\right) dz == -\frac{\sigma n I_0}{c}\int_0^z \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi {w_0}^2}\right)^2}\right) dz$$

Que puede transformarse en una integral de la forma $\int \frac{dz}{a^2+z^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{z}{a} + C$ con $a = \frac{\pi {w_0}^2}{\lambda}$

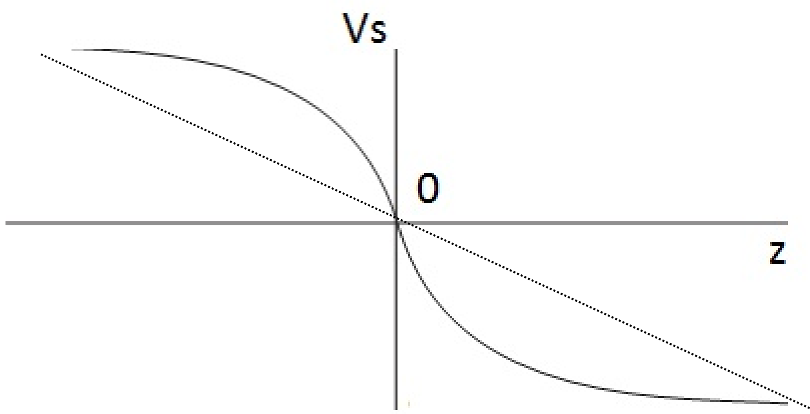
Entonces

$$V_s(0,0,z) = -\frac{\sigma n I_0 \pi {w_0}^2}{c\lambda}\int_0^z \left(\frac{1}{\left(\frac{\pi {w_0}^2}{\lambda}\right)^2 + z^2}\right) dz = -\frac{\sigma n I_0 \pi {w_0}^2}{c\lambda}\frac{\lambda}{\pi {w_0}^2}\tan^{-1}\frac{\lambda}{\pi {w_0}^2} z$$

O sea

$V_s(0,0,z) = -\frac{\sigma n I_0}{c}\tan^{-1}\frac{\lambda}{\pi {w_0}^2} z$ (26)

La (23) significa que en $z = 0, \tan^{-1}\frac{\lambda}{\pi {w_0}^2} z = 0$ y $V_s(0,0,z) = 0$, en $z > 0, V_s(0,0,z) < 0$ y en $z < 0, V_s(0,0,z) > 0$. Una forma de representar gráficamente esta energía potencial se da en en la figura que sigue.

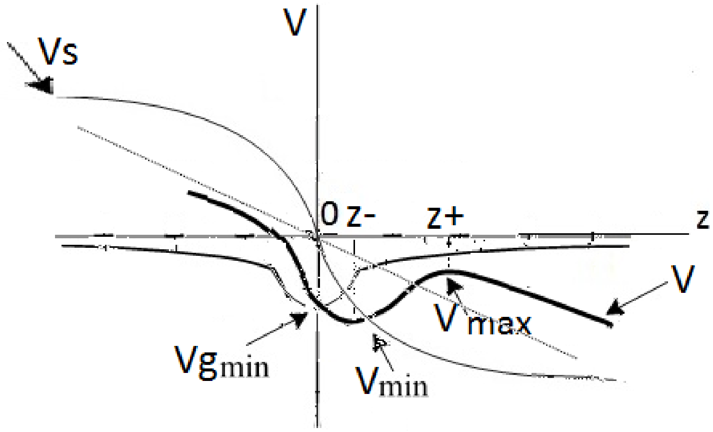


Finalmente, la energía potencial de la partícul es:

$V(z) = V_g(0,0,z) + V_s(0,0,z) = -\frac{\boldsymbol{\alpha I_0 {w_0}^2}}{\boldsymbol{c}}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{w(z)^2}}\right) - \frac{\sigma n I_0 \pi {w_0}^2}{c\lambda}\tan^{-1}\frac{\lambda}{\pi {w_0}^2} z = -\frac{\boldsymbol{I_0 {w_0}^2}}{\boldsymbol{c}}\left(\frac{\alpha}{w(z)^2} + \frac{\sigma n}{\lambda}\tan^{-1}\frac{\lambda}{\pi {w_0}^2} z\right)$

$V(z) = -\frac{\boldsymbol{I_0 {w_0}^2}}{\boldsymbol{c}}\left(\frac{\alpha}{w(z)^2} + \frac{\sigma n}{\lambda}\tan^{-1}\frac{\lambda}{\pi {w_0}^2} z\right)$ (27)

Que puede representarse gráficamente como es la siguiente figura.



Como la (20) sólo tiene 2 valores y $z_- < z_+$ el mínimo (equlibrio estable) corresponde a z_- y el máximo a z_+ (equlibrio inestable). **LQQD**